Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 2, 2023-05-08

Achtung, ausnahmsweise frühere Abgabe: bis Donnerstag, 11. Mai, 11:30 Uhr

Präsenzaufgabe 1

(Vergl. Folie 72): eine Signatur $\mathcal{I} \xrightarrow{\overline{ar}} \mathbb{N}$ mit gegebener Semantik (d.h., vorgegebenen Wahrheitstabellen für jeden Junktor in $\mathcal{I}$) heißt *funktional vollständig*, wenn zu jeder Formel $A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ eine äquivalente Formel $B \in \boldsymbol{Term}(\overline{\boldsymbol{ar}}, \mathcal{A})$ existiert.

Der 3-stellige Junktor $[\,]_{/3}$ möge die Semantik von *if-then-else* haben, als Wahrheitstabelle:

p	q	r	$[p,q,r]$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Zeigen Sie, dass die Signatur $\{[\,]_{/3}, \bot_{/0}, \top_{/0}\}$ funktional vollständig ist.

Lösungsvorschlag:

Mittels stuktureller Induktion wollen wir alle Junktoren aus $\mathcal{J}$ mit Hilfe der Junktoren aus $\mathcal{I}$ simulieren: Die konstanten Junktoren stimmen überein. Nun sei die Simulation möglich für $A, B \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$, die zu $A', B' \in \boldsymbol{Term}(\{[\,]_{/3}, \bot_{/0}, \top_{/0}\}, \mathcal{A})$ äquivalent sind.

- $\neg A \mathrel{\text{⫤}\!\!\text{⊨}} [A, \bot, \top] \mathrel{\text{⫤}\!\!\text{⊨}} [A', \bot, \top]$, per Wahrheitstabelle:

A	$\bot$	$\top$	$[A,\bot,\top]$
0	0	1	1
1	0	1	0

- $A \to B \mathrel{\text{⫤}\!\!\text{⊨}} [A, B, \top] \mathrel{\text{⫤}\!\!\text{⊨}} [A', B', \top]$, per Wahrheitstabelle:

A	B	$\top$	$[A,B,\top]$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	1

- $A \vee B \models\!\!\!\mid \neg A \to B \models\!\!\!\mid [A, \top, B] \models\!\!\!\mid [A', \top, B']$, per Wahrheitstabelle:

A	B	$\top$	$[A, \top, B]$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

  Die Umformung $A \vee B \models\!\!\!\mid \neg A \to B$ liefert die viel kompliziertere Simulation $[\neg A, B, \top] \models\!\!\!\mid [[A', \bot, \top], B', \top]$.

- $A \wedge B \models\!\!\!\mid [A, B, \bot] \models\!\!\!\mid [A', B', \bot]$, per Wahrheitstabelle:

A	B	$\bot$	$[A, B, \bot]$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	1

  Die Umformung $A \wedge B \models\!\!\!\mid \neg(\neg A \vee \neg B) \models\!\!\!\mid \neg(A \to \neg B)$ liefert auch eine viel kompliziertere Simulation.

- $A \leftrightarrow B \models\!\!\!\mid [A, B, \neg B] \models\!\!\!\mid [A, B, [B, \bot, \top]] \models\!\!\!\mid [A', B', [B', \bot, \top]]$, per Wahrheitstabelle

A	B	$\neg B$	$[A, B, \neg B]$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Geht man auf die Definition $A \leftrightarrow B \models\!\!\!\mid (A \to B) \wedge (B \to A)$ zurück, so erbigt sich eine noch umständlichere Simulation.

Präsenzaufgabe 2

Wir modifizieren $\mathcal{K}_0$, indem wir Schema Ax3 aus $\mathcal{R}_0$ entfernen, und stattdessen die Schemata

$$\frac{}{\neg\neg A \to A}\ (\text{Th2}) \quad \text{sowie} \quad \frac{}{(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A}\ (\text{Th7})$$

hinzufügen. Zeigen Sie, dass auch der resultierende Kalkül $\mathcal{K}_0'$ vollständig und korrekt ist.

Lösungsvorschlag:

Alle Axiome von $\mathcal{K}_0'$ sind in $\mathcal{K}_0$ herleitbar.

Für die umgekehrte Richtung genügt es zu zeigen, dass (Ax3) in $\mathcal{K}_0'$ herleitbar ist. Leider beruhen die Herleitungen von (Th3), (Th4), (Th5), (Th6) und (Th8) in $\mathcal{K}_0$ direkt oder mittelbar auf (Ax3), können also zunächst in $\mathcal{K}_0'$ nicht verwendet werden.

Andererseits beruht der Beweis des Deduktionstheorems für $\mathcal{K}_0$ nur auf (Ax1), (Ax2) und auf (Th1), und der Beweis von (Th1) verwendet (Ax3) nicht. Damit steht das Deduktionstheorem auch in $\mathcal{K}_0'$ zur Verfügung. Das liefert folgende Ableitung von (Ax3) in $\mathcal{K}_0'$:

0.	$\neg B \to \neg A$	Ann.
1.	$\quad A$	Ann.
2.	$\quad A \to \neg B \to A$	Ax1
3.	$\quad \neg B \to A$	MP, 1,2
4.	$\quad (\neg B \to A) \to (\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B$	Th7
5.	$\quad (\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B$	MP, 3,4
6.	$\quad \neg\neg B$	MP, 0,5
7.	$\quad \neg\neg B \to B$	Th2
8.	$\quad B$	MP, 3,5
9.	$A \to B$	DT, 1–8
10.	$(\neg B \to \neg A) \to A \to B$	DT, 0–9

Hausaufgabe 3 [10 PUNKTE]

Untersuchen Sie folgende Junktormengen $\mathcal{I}$ auf funktionale Vollständigkeit. Begründen Sie Ihre Antwort. [Alle Junktoren haben hier ihre übliche Stelligkeit und Semantik.]

1. [4 PUNKTE] $\mathcal{I} = \{\neg, \wedge\}$
2. [3 PUNKTE] $\mathcal{I} = \{\wedge, \vee\}$
3. [3 PUNKTE] $\mathcal{I} = \{\to, \bot\}$

Lösungsvorschlag:

1. Nachzuweisen ist, dass jede Formel $A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ zu einer Formel $A' \in \boldsymbol{Term}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ äquivalent ist. Die umgekehrte Richtung ist wegen $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ trivial.
   - $\bot \Dashv\vDash p \wedge \neg p$ und $\top \Dashv\vDash \neg(p \wedge \neg p)$ für jedes $p \in \mathcal{A}$.
   - $A \vee B \Dashv\vDash \neg(\neg A \wedge \neg B) \Dashv\vDash \neg(\neg A' \wedge \neg B')$ nach den deMorganschen Regeln.
   - $A \to B \Dashv\vDash \neg A \vee B \Dashv\vDash \neg(A \wedge \neg B) \Dashv\vDash \neg(A' \wedge \neg B')$ ggf. per Wahrheitstabelle.
   - $A \leftrightarrow B \Dashv\vDash (A \to B) \wedge (B \to A) \Dashv\vDash (A' \to B') \wedge (B' \to A')$, und dies läßt sich aufgrund der vorigen Ergebnisse durch $\neg$ und $\wedge$ ausdrücken.
2. $\neg$ läßt sich nicht durch $\wedge$ und $\vee$ ausdrücken: $\neg$ nimmt nur ein Argument, eine Simulation mittels $\wedge$ und $\vee$ dürfte das auch mehrfach verwenden. Aber $\wedge$ und $\vee$ bilden sowohl $\langle 0, 0\rangle$ auf 0 und $\langle 1, 1\rangle$ auf 1 ab, also auch längere konstante Tupel.

   Alternativ: Gemäß Folie 73 ist jede Formel in $\boldsymbol{Term}(\{\wedge, \vee\}, \mathcal{A})$ konstant, also ist nach dem Post'schen Vollständigkeitssatz $\{\wedge, \vee\}$ nicht vollständig.
3. Wegen Teil 1 ist nur nachzuweisen, dass jede Formel $A \in \boldsymbol{Term}(\{\neg, \wedge\}, \mathcal{A})$ zu einer Formel $A' \in \boldsymbol{Term}(\{\to, \bot\}, \mathcal{A})$ äquivalent ist.
   - $\neg A \Dashv\vDash A \to \bot \Dashv\vDash A' \to \bot$, ggf. per Wahrheitstabelle.
   - $A \wedge B \Dashv\vDash \neg(\neg A \vee \neg B) \Dashv\vDash \neg(A \to \neg B) \Dashv\vDash (A \to B \to \bot) \to \bot \Dashv\vDash (A' \to B' \to \bot) \to \bot$

Hausaufgabe 4 [10 PUNKTE]

Beweisen Sie mit allen Details den Satz auf Folie 81: Gegeben ist ein deduktives System $\mathcal{K} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R}\rangle$. Eine Formel in $\mathcal{F}$ ist genau dann ein Theorem (d.h., hat einen „langen Beweis"), wenn sie einen „kurzen Beweis" (d.h., eine Ableitung ohne Prämissen) hat.

Lösungsvorschlag:

Im Folgenden ist die Prämissenmenge Γ leer.

($\Longrightarrow$) Induktion über die Anzahl der Regelanwendungen in einem langen Beweis für B.

$n = 1$: Es handelt sich bei B um ein Axiom. Ein kurzer Beweis hat dann die Form $\langle B \rangle$.

Annahme: Die Behauptung sei wahr für alle Theorme, die einen langen Beweis mit $1 \leq k < n$ Regelanwendungen haben.

Schluß: Das Theorem B habe einen minimalen langen Beweis mit $n > 1$ Regelanwendungen. Dabei resultiere B aus der Anwendung einer Regel mit $m \leq n$ Prämissen B_j, $j < m$. Nach Konstruktion benötigen deren lange Beweise weniger als n Regelanwendungen, also existieren kurze Beweise $\langle B_{j,k} : k \leq \ell_j \rangle$ mit $B_{j,\ell_j} = B_j$. Konkatenation dieser kurzen Beweise und Anfügen von B als letztes Element liefert einen kurzen Beweis von B. Dieser kann Redundanz enthalten und muß daher nicht minimal sein, aber das stört nicht.

($\Longleftarrow$) Induktion über die Länge kurzer Beweise für B.

$n = 1$: Es handelt sich bei B um ein Axiom. Dann existiert eine Regel mit leerer Prämisse und Konklusion B. Diese Regel ist selber ein langer Beweis für B.

Annahme: Die Behauptung sei wahr für alle Formeln mit einem kurzen Beweis der Länge $\leq n$.

Schluß: B habe einen minimalen kurzen Beweis der Länge $n + 1$, etwa $\langle B_i : i \leq n \rangle$ mit $B_n = B$. Da B kein Axiom sein kann, resultiert B aus der Anwendung einer Regel mit $m > 0$ Prämissen $B_{f(j)}$ für eine Abbildung $m \xrightarrow{f} n$ (man beachte, dass B_n keine Prämisse sein kann). Mit Hilfe dieser Regel lassen sich die nach Voraussetzung existierenden langen Beweise für $B_{f(j)}$, $j < m$, zu einem langen Beweis von B kombinieren. Man beachte: Die Funktion f braucht weder injektiv noch surjektiv zu sein!

Hausaufgabe 5 [10 PUNKTE]

Zeigen Sie im Hilbert-Kalkül $\mathcal{K}_0$:

1. [4 PUNKTE] $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to A \to C$
2. [6 PUNKTE] $\vdash \neg(A \to B) \to B \to A$

Lösungsvorschlag:

1.

0.	$A \to B$	Ann.
1.	$B \to C$	Ann.
2.	A	Ann
3.	B	MP, 2,0
4.	C	MP, 3,1
5.	$A \to C$	DT, 2–4
6.	$(B \to C) \to A \to C$	DT, 1–5
7.	$(A \to B) \to (B \to C) \to A \to C$	DT, 1–5

2.

0.	$\neg(A \to B)$	Ann.
1.	$B \to A \to B$	Ax1
2.	$(B \to A \to B) \to \neg(A \to B) \to \neg B$	Th5

3.	$\neg(A \to B) \to \neg B$	MP 1,2
4.	$\neg B$	MP 0,3
5.	$\neg B \to B \to A$	Th3
6.	$B \to A$	MP 4,5
7.	$\neg(A \to B) \to B \to A$	DT 0–6

Die Zeilen 1–3 könnten auch vor den ersten Kasten gezogen werden. Alternative Lösung

0.	$\neg(A \to B)$	Ann.
1.	B	Ann.
2.	$B \to A \to B$	Ax1
3.	$A \to B$	MP, 1,2
4.	$\perp$	0,3
5.	$\neg B$	IK, 1–4
6.	$\neg B \to B \to A$	Th3
7.	$B \to A$	MP, 5,6
8.	$\neg(A \to B) \to B \to A$	DT, 0–7