Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 3, 2023-05-15

Achtung, wegen Feier- und Brückentag spätere Abgabe: bis Donnerstag, 25. Mai, 11:30 Uhr

Präsenzaufgabe 1

Zeigen Sie mittels natürlicher Deduktion: $(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \to \neg A$.

Lösungsvorschlag:

0.	$(A \to B) \wedge (A \to \neg B)$	Ann.
1.	$A \to B$	$(\wedge e)$, 0
2.	$A \to \neg B$	$(\wedge e)$, 0
3.	A	Ann.
4.	B	$(\to e)$, 3,1
5.	$\neg B$	$(\to e)$, 3,2
6.	$\perp$	$(\neg e)$, 4,5
7.	$\neg A$	$(\neg i)$, 3–6
8.	$(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \to \neg A$	$(\to i)$, 0–7

Weiteres Material zum Üben der natürlichen Deduktion finden Sie auf den Folien 123–131.

Präsenzaufgabe 2

Zeigen Sie folgende Aussagen im Gentzen-Sequenzenkalkül. Entwickeln Sie die Lösungen zunächst von unten nach oben in Baumform(!), bevor Sie die Schritte in eine vertikale durchnummerierte Liste mit Begründungen der einzelnen Zeilen überführen.

$$s \wedge r,\ r \to \neg(p \wedge q) \vdash \neg p,\ \neg q$$

Achtung: Die Strategien für $\mathcal{K}_0$ + (DT) sowie $\mathcal{K}_{\mathrm{nat}}$ mit Hilfe geeigneter Annahmen relevante Teilformeln aus den Prämissen und der Schlußfolgerung zu extrahieren, sind hier nicht mehr anwendbar!

Lösungsvorschlag:

(Im folgenden Baum sollen die Farben dabei helfen, die Teilformeln zu identifizieren, auf die die aktuelle Regel zugreift. Das funktioniert besser im rechten Teilbaum, wo Teilformeln nicht in aufeinanderfolgenden Schritten verwendet werden.)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{s, r \vdash \neg p, \neg q, r}\,(\textsc{Ax})}{s \wedge r \vdash \neg p, \neg q, r}\,(\wedge L) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{s \wedge r, q, p \vdash p}\,(\textsc{Ax}) \quad \dfrac{\dfrac{}{s \wedge r, p, q \vdash q}\,(\textsc{Ax})}{s \wedge r, q, p \vdash q}\,(\text{x-}L)}{s \wedge r, q, p \vdash p \wedge q}\,(\wedge R)}{s \wedge r, q \vdash p \wedge q, \neg p}\,(\neg R)}{s \wedge r \vdash p \wedge q, \neg p, \neg q}\,(\neg R)}{s \wedge r \vdash \neg p, p \wedge q, \neg q}\,(\text{x-}R)}{s \wedge r \vdash \neg p, \neg q, p \wedge q}\,(\text{x-}R)}{s \wedge r, \neg(p \wedge q) \vdash \neg p, \neg q}\,(\neg L)}{s \wedge r, r \to \neg(p \wedge q) \vdash \neg p, \neg q}\,(\to L)
$$

0.	$s, r \vdash \neg p, \neg q, r$	(AX)
1.	$s \wedge r \vdash \neg p, \neg q, r$	$(\wedge$ L), 0
2.	$s \wedge r, q, p \vdash p$	(AX)
3.	$s \wedge r, p, q \vdash q$	(AX)
4.	$s \wedge r, q, p \vdash q$	(X-L)
5.	$s \wedge r, q, p \vdash p \wedge q$	$(\wedge$ R), 3,4
6.	$s \wedge r, q \vdash p \wedge q, \neg p$	$(\neg$ R), 5
7.	$s \wedge r \vdash p \wedge q, \neg p, \neg q$	$(\neg$ R), 6
8.	$s \wedge r \vdash \neg p, p \wedge q, \neg q$	(X-L), 7
9.	$s \wedge r \vdash \neg p, \neg q, p \wedge q$	(X-L), 8
10.	$s \wedge r, \neg(p \wedge q) \vdash \neg p, \neg q$	$(\neg$ L), 9
11.	$s \wedge r, r \to \neg(p \wedge q) \vdash \neg p, \neg q$	$(\to$ L), 1,10

Hausaufgabe 3 [14 PUNKTE]

Beweisen Sie im Hilbert-Kalkül $\mathcal{K}_0$

$$\vdash \big((q \to \neg p) \to \neg(t \to \neg p)\big) \to p$$

1. [8 PUNKTE] ohne Verwendung der Inkonsistenzregel;
2. [6 PUNKTE] mit Hilfe der Inkonsistenzregel.

Lösungsvorschlag:

1.

0.	$(q \to \neg p) \to (\neg(t \to \neg p)$	Ann.
1.	$\neg p$	Ann.
2.	$\neg p \to q \to \neg p$	Ax0
3.	$q \to \neg p$	MP, 1,2
4.	$\neg(t \to \neg p)$	MP, 3,0
5.	$\neg p \to \neg(t \to \neg p)$	DT, 1–4
6.	$\neg p \to t \to \neg p$	Ax0
7.	$\big(\neg p \to t \to \neg p\big) \to \big(\neg p \to \neg(t \to \neg p)\big) \to \neg\neg p$	Th7
8.	$\big(\neg p \to \neg(t \to \neg p)\big) \to \neg\neg p$	MP, 6,7
9.	$\neg\neg p$	MP, 5,8
10.	$\neg\neg p \to p$	Th2
11.	p	MP, 9,10
12.	$\big((q \to \neg p) \to \neg(t \to \neg p)\big) \to p$	DT, 0–11

2.

0.	$(q \to \neg p) \to (\neg(t \to \neg p)$	Ann.
1.	$\neg p$	Ann.
2.	$\neg p \to q \to \neg p$	Ax0
3.	$q \to \neg p$	MP, 1,2
4.	$\neg(t \to \neg p)$	MP, 3,0
5.	$\neg p \to t \to \neg p$	Ax0
6.	$t \to \neg p$	MP, 1,5
7.	$\bot$	4,6
8.	$\neg\neg p$	IK, 1–7
9.	$\neg\neg p \to p$	Th2
10.	p	MP, 8,9
11.	$\big((q \to \neg p) \to \neg(t \to \neg p)\big) \to p$	DT, 0–9

Hausaufgabe 4 [16 PUNKTE]

Zeigen Sie mittels natürlicher Deduktion $\mathcal{K}_{\text{nat}}$:

1. [6 PUNKTE] $A \vee \neg B \Vdash B \to A$
2. [10 PUNKTE] $\big((A \to B) \to B\big) \Vdash (B \to A) \to A$

Lösungsvorschlag:

1.

0.	$A \vee \neg B$	Prämisse
1.	B	Ann.
2.	A	Ann.
3.	$\neg B$	Ann.
4.	$\bot$	$(\neg\, e)$, 1,3
5.	A	$(\bot\, e)$, 4
6.	A	$(\vee\, e)$, 0, 2–2, 3–5
7.	$B \to A$	$(\to i)$, 1–6

2.

0.	$(A \to B) \to B$	Prämisse
1.	$B \to A$	Ann.
2.	$A \to B$	Ann.
3.	B	$(\to e)$, 2,0
4.	A	$(\to e)$, 3,1
5.	$(A \to B) \to A$	$(\to i)$, 2–4
6.	$\neg A$	Ann.
7.	A	Ann.
8.	$\bot$	$(\neg\, e)$, 6,7
9.	B	$(\bot\, e)$, 8
10.	$A \to B$	$(\to i)$, 7–9
11.	A	$(\to e)$, 10, 5
12.	$\bot$	$(\neg\, e)$, 6, 11
13.	$\neg\neg A$	$(\neg\, i)$, 6–12
14.	A	$(\neg\neg\, e)$, 13
15.	$(B \to A) \to A$	$(\to i)$, 1–14

Oder alternativ:

0.	$(A \to B) \to B$	Prämisse
1.	$B \to A$	Ann.
2.	$\neg A$	Ann.
3.	$\neg A \to A \to B$	tH3 (Folie 122)
4.	$A \to B$	$(\to e)$, 2,3
5.	B	$(\to e)$, 4,0
6.	A	$(\to e)$, 5,1
7.	$\bot$	$(\neg\, e)$, 2,6
8.	$\neg\neg A$	$(\neg\, i)$, 2–7
9.	A	$(\neg\neg\, e)$, 8
10.	$(B \to A) \to A$	$(\to i)$, 1–9

Hausaufgabe 5 [10+20 PUNKTE]

Geben Sie jeweils eine Herleitung in Gentzens Sequenzen-Kalkül zunächst in Baumform, dann als vertikale nummerierte Liste mit Begründungen, einschließlich der strukturellen Regeln auf den Folien 140 und 141.

1. [10 PUNKTE] $\neg A \vee B \vdash A \to B$
2. [20 SONDERPUNKTE] $\big(r \wedge (p \vee q)\big) \to \neg(r \wedge p) \to (r \wedge q)$

Lösungsvorschlag:

1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash B, A}\,(\textsc{ax})}{A, \neg A \vdash B}\,(\neg L) \qquad \dfrac{}{A, B \vdash B}\,(\textsc{ax})}{A, \neg A \vee B \vdash B}\,(\vee L)}{\neg A \vee B, A \vdash B}\,(\textsc{x}\text{-}L)}{\neg A \vee B \vdash A \to B}\,(\to R)$$

0.	$A \vdash B, A$	$(\textsc{ax})$
1.	$A, \neg A \vdash B$	$(\neg L)$, 0
2.	$A, B \vdash B$	$(\textsc{ax})$
3.	$A, \neg A \vee B \vdash B$	$(\vee L)$, 1,2
4.	$\neg A \vee B, A \vdash B$	$(\textsc{x}\text{-}L)$,3
5.	$\neg A \vee B \vdash A \to B$	$(\to R)$, 4

2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vee q\,,\, r \vdash r \wedge q\,,\, r}\,(\textsc{ax})}{r\,,\, p \vee q \vdash r \wedge q\,,\, r}\,(\textsc{x}\text{-}L) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vee q\,,\, r \vdash p\,,\, r}\,(\textsc{ax})}{r\,,\, p \vee q \vdash p\,,\, r}\,(\textsc{x}\text{-}L) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{r\,,\, p \vdash q\,,\, p}\,(\textsc{ax})}{r\,,\, p \vdash p\,,\, q}\,(\textsc{x}\text{-}R) \qquad \dfrac{}{r\,,\, q \vdash p\,,\, q}\,(\textsc{ax})}{r\,,\, p \vee q \vdash p\,,\, q}\,(\vee L)}{r\,,\, p \vee q \vdash p\,,\, r \wedge q}\,(\wedge R)}{r\,,\, p \vee q \vdash r \wedge q\,,\, p}\,(\textsc{x}\text{-}R)}{r\,,\, p \vee q \vdash r \wedge q\,,\, r \wedge p}\,(\wedge R)}{r\,,\, p \vee q\,,\, \neg(r \wedge p) \vdash r \wedge q}\,(\neg L)}{r\,,\, p \vee q \vdash \neg(r \wedge p) \to (r \wedge q)}\,(\to R)}{r \wedge (p \vee q) \vdash \neg(r \wedge p) \to (r \wedge q)}\,(\wedge L)}{\vdash \big(r \wedge (p \vee q)\big) \to \neg(r \wedge p) \to (r \wedge q)}\,(\to R)$$

0.	$r, p \vdash q, p$	(AX)
1.	$r, p \vdash p, q$	(X-R),0
2.	$r, q \vdash p, q$	(AX)
3.	$r, p \vee q \vdash p, q$	($\vee L$), 1,2
4.	$p \vee q, r \vdash p, r$	(AX)
5.	$r, p \vee q \vdash p, r$	(X-L),5
6.	$r, p \vee q \vdash p, r \wedge q$	($\wedge R$), 3,5
7.	$r, p \vee q \vdash r \wedge q, p$	(X-R), 6
8.	$p \vee q, r \vdash r \wedge q, r$	(AX)
9.	$r, p \vee q \vdash r \wedge q, r$	(X-L),0
10.	$r, p \vee q \vdash r \wedge q, r \wedge p$	($\wedge R$), 7,9
11.	$r, p \vee q, \neg(r \wedge p) \vdash r \wedge q$	($\neg L$), 10
12.	$r, p \vee q \vdash \neg(r \wedge p) \to r \wedge q$	($\neg L$), 11
13.	$r \wedge (p \vee q) \vdash \neg(r \wedge p) \to r \wedge q$	($\wedge L$), 12
14.	$\vdash \big(r \wedge (p \vee q)\big) \to \neg(r \wedge p) \to r \wedge q$	($\wedge R$), 13