Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 4, 2023-06-01

Achtung, wegen der Länge und damit nach der großen Übung Zeit zur Bearbeitung bleibt spätere Abgabe: bis Donnerstag, 15. Juni, 11:30 Uhr. Bitte Aufgabe 9 gleich bearbeiten!

Präsenzaufgabe 1

Verwenden Sie Tableaus zum Nachweis, dass

1. $(p \to q) \to \neg q \to \neg p$ eine Tautologie ist;
2. $\big(p \to (q \land r)\big) \land (r \to \neg q) \land p$ unerfüllbar ist;

Lösungsvorschlag:

1.

$\star\ (p \to q) \to \neg q \to \neg p \quad 0$

$0a\ \ \neg(p \to q) \quad 1$ | $0b\ \ \neg q \to \neg p \quad 2$

$1a\ \ p$ | $2a\ \ q$ | $2b\ \ \neg p$

$1b\ \ \neg q$

Man beachte, dass die Reihenfolge zwischen 1a und 1b willkürlich ist, und diese Formeln in derselben Knotenmenge liegen! Da keine Widersprüche auftreten, muß es sich bei der Ursprungsformel um eine Tautologie handeln.

Alternativ kann man auch die Unerfüllbarkeit von $\{p \to q, \neg(\neg q \to \neg p)\}$ zeigen (DT!):

$\star\ p \to q \quad 1$

$\star\ \neg(\neg q \to \neg p) \quad 0$

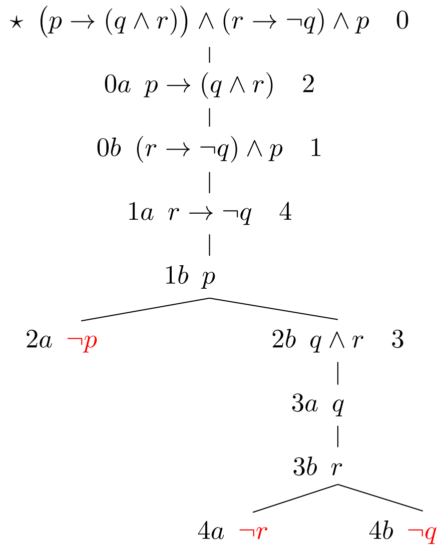
$0a\ \ \neg q$

$0b\ \ p$

$1a\ \ \neg p$ | $1b\ \ q$

In Schritt 2 wurde die Zeile $0a$ statt $1a$ gewählt, da dies sofort einen Widerspruch produziert.

2.



Präsenzaufgabe 2

Wandeln Sie die Formel $A = ((p \to q) \to r) \wedge (\neg r \to (r \to p))$ um in eine äquivalente

(a) NNF;

(b) KNF;

(c) *kanonische KNF* (kKNF), d.h., eine KNF ohne Wiederholung von Klauseln, in der jede Klausel zu jedem Atom aus $@(A)$ genau ein Literal enthält.

Lösungsvorschlag:

(a) Zur Konstruktion der NNF ist zunächst die Implikation $\to$ zu eliminieren, dann sind die De Morgen'schen Regeln anzuwenden, wobei ggf. auftretende doppelte Negationen gleich entfernt werden können.

$$\begin{aligned}((p \to q) \to r) \wedge (\neg r \to (r \to p)) &\mathrel{\models\!\!\!\dashv} (\neg(\neg p \vee q) \vee r) \wedge (r \vee \neg r \vee p)\\ &\mathrel{\models\!\!\!\dashv} ((p \wedge \neg q) \vee r) \wedge \top\\ &\mathrel{\models\!\!\!\dashv} (p \wedge \neg q) \vee r\end{aligned}$$

(b) Anwendung des Distributivgesetzes liefert nun die KNF:

$$(p \wedge \neg q) \vee r \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$$

(c) Die bisher zu kurzen Klauseln sind bisher zu kurz mittels Konjunktion mit $q \vee \neg q \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \top$ bzw. $p \vee \neg p \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \top$ und Anwendung der Distributivgesetze auf die gewünschte Länge gebracht. Ggf. sind dann Wiederholungen von Klauseln zu entfernen. Um diese besser entdecken zu können, ordnen wir die Literale innerhalb der Klauseln alphabetisch:

$$\begin{aligned}(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) &\mathrel{\models\!\!\!\dashv} (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)\\ &\mathrel{\models\!\!\!\dashv} (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)\\ &\mathrel{\models\!\!\!\dashv} \big\{\{p, q, r\}, \{p, \neg q, \neg r\}, \{\neg p, \neg q, r\}\big\} \quad \text{in Mengenschreibweise}\end{aligned}$$

Für n Atome gibt es 2^{2^n} verschiedene Formeln in kKNF, was nocheinmal die funktionale Vollständigkeit der Junktormenge $\{\neg, \wedge, \vee\}$ zeigt.

Präsenzaufgabe 3

Entscheiden Sie die Erfüllbarkeit von

$$A = \neg p \wedge (p \vee q \vee \neg t) \wedge (\neg q \vee \neg s) \wedge (\neg q \vee s \vee t) \wedge (\neg p \vee r) \wedge \neg r \wedge (\neg q \vee q \vee s)$$

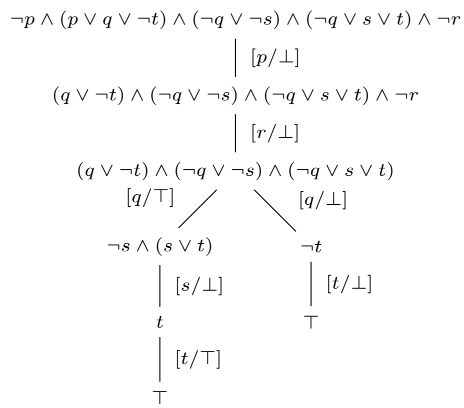
(a) mit dem Davis-Putnam-Verfahren,

(b) mit der Resolutionsmethode.

Lösungsvorschlag:

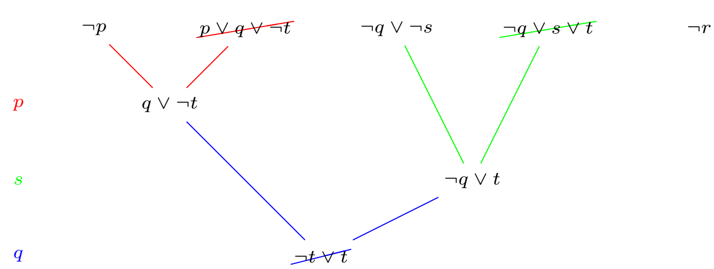
Da die Formel in KNF vorliegt, und die letzte Klausel zu $\top$ äquivalent ist, können wir diese entfernen. Weiterhin wird die Klausel $\neg p \vee r$ von $\neg p$ subsummiert, darf also auch entfernt werden.

(a) Die Pure Literal Regel greift nicht. Bis auf eine Anwendung der Splitting-Regel wird mehrfach die Unit-Regel angewendet:



A ist erfüllbar.

(b) Wir betrachten die Variablen in der Reihenfolge p, s, q, r:



Die leere Klausel kann nicht mittels Resolution erzeugt werden, somit ist A erfüllbar.

Hausaufgabe 4 [12 PUNKTE]

Bilden Sie ein vollständiges Tableaux zu der Formel A.

$$A = \big[(p \vee \neg q) \rightarrow \neg(\neg r \rightarrow [\neg p \vee \neg q])\big] \vee \big[(p \rightarrow r) \rightarrow (\neg p \wedge q)\big]$$

Hierbei sind die eckigen Klammern gleichbedeutend mit runden Klammern; sie wurden lediglich zur besseren Lesbarkeit verwendet.

Überlegen Sie sich, wie sich die Literale entlang von Ästen nutzen lassen, um eine geeignete zu A äquivalente Normalform zu finden und geben sie diese an.

Lösungsvorschlag:

$$\big[(p \vee \neg q) \to \neg(\neg r \to [\neg p \vee \neg q])\big] \vee \big[(p \to r) \to (\neg p \wedge q)\big] \quad 0$$

- $0a$ $(p \vee \neg q) \to \neg(\neg r \to [\neg p \vee \neg q])$ $\quad 1$
  - $1a$ $\neg(p \vee \neg q)$ $\quad 2$
    - $2a$ $\neg p$
    - $2b$ q
  - $1b$ $\neg(\neg r \to [\neg q \vee \neg q])$ $\quad 3$
    - $3a$ $\neg r$
    - $3b$ $\neg(\neg p \vee \neg q)$ $\quad 4$
      - $4a$ p
      - $4b$ q
- $0b$ $(p \to r) \to (\neg p \wedge q)$ $\quad 5$
  - $5a$ $\neg(p \to r)$ $\quad 6$
    - $6a$ $\neg p$
    - $6b$ r
  - $5b$ $\neg p \wedge q$ $\quad 7$
    - $7a$ $\neg p$
    - $7b$ q

Die Co-Klauseln der disjunktive Normalform sind gerade die Mengen an Literalen in den Blatt-Mengen:

$$(\neg p \wedge q) \vee (\neg r \wedge p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge q)$$

Hausaufgabe 5 [10 PUNKTE]

Weisen Sie nach, dass die Erfüllbarkeitsäquivalenz $\boxminus_e = (\sqsubseteq_e \cup \sqsupseteq_s)^+$ (vergl. Folie 164) eine echte Obermenge der Äquivalenz $\boxminus$ (siehe Folie 69) ist. [Hinweis: Der Trick aus Präsenzaufgabe 2(c) erweist sich als nützlich.]

Lösungsvorschlag:

- $\boxminus \subseteq \boxminus_e$: Äquivalente Formeln A und B können verschiedene Atom-Mengen $@(A)$ bzw. $@(B)$ haben, wie z.B. $\top$ und $p \vee \neg p$.

  Daher wollen wir A und B zunächst zu äquivalenten Formeln A' bzw. B' umformen, die $@(A') = @(B')$ erfüllen, etwa wie folgt:

  $$A' := A \wedge \bigwedge_{p \in @(B) - @(A)} (p \vee \neg p) \quad \text{sowie} \quad B' := B \wedge \bigwedge_{q \in @(A) - @(B)} (q \vee \neg q)$$

  Anmerkung: Es gibt noch viele andere Möglichkeiten, passende Formeln A' und B' zu realisieren.

  Auf jeden Fall gilt nun

  $$A' \sqsubseteq_e A \quad \text{und} \quad B' \sqsubseteq_e B \quad \text{sowie} \quad A' \sqsubseteq_e B' \quad \text{und} \quad B' \sqsubseteq_e A'$$

  und wir können A und B mit Hilfe mindestens eines $\sqsubseteq_e$-Zick-Zacks verbinden, etwa

  $$A \sqsupseteq_e A' \sqsubseteq_e B' \sqsubseteq_e B$$

  Die Relation $\sqsubseteq_e$ ist offenbar reflexiv (und auch transitiv), die kleinste symmetrische Obermenge ist somit $\sqsubseteq_e \cup \sqsupseteq_e$ und deren transitive Hülle ist die kleinste $\sqsubseteq_e$ umfassende ÄR. Damit gehört ein Paar $\langle A, B \rangle$ genau dann zu $\boxminus_e = (\sqsubseteq_e \cup \sqsupseteq_s)^+$, wenn es ein positives $n \in \mathbb{N}$ und ein Tupel $\boldsymbol{C} \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]^n$ gibt mit $C_0 = A$ und $C_{n-1} = B$ sowie $C_0 \sqsupseteq_e C_1 \sqsubseteq_e C_2 \dots C_{n-1}$ oder umgekehrt („Zick-Zack“).

- $\boxminus$ ist echte Teilmenge von $\boxminus_e$: Für verschiedene Atome p und q gilt offenbar

  $$p \wedge q \sqsubseteq_e p \quad \text{und folglich} \quad p \wedge q \boxminus_e q$$

  aber $p \wedge q$ ist natürlich nicht äquivalent su p.

Hausaufgabe 6 [12 PUNKTE]

Konstruieren Sie mittels struktureller Rekursion einen Algorithmus, der Formeln in Negationsnormalform in äquivalente Formeln in konjunktiver Normalform überführt:

Eingabe: Eine aussagenlogische Formel A in NNF
Ausgabe: Eine zu A äquivalente Formel in KNF, bezeichnet als $\mathsf{KNF}(A)$

Lösungsvorschlag:

1. [1 PUNKT] $A = \bot$ oder A atomar: wir setzen

   $$\mathsf{KNF}(A) := A$$

2. [2 PUNKTE] $A = B \wedge C$: wir setzen

   $$\mathsf{KNF}(B \wedge C) := \mathsf{KNF}(B) \wedge \mathsf{KNF}(C)$$

3. [6 PUNKTE] $A = B \vee C$, wobei $\mathsf{KNF}(B)$ und $\mathsf{KNF}(C)$ folgende Form als Konjunktion von Klauseln haben:
$$\mathsf{KNF}(B) = \bigwedge_{i<n} B_i \quad \text{und} \quad \mathsf{KNF}(C) = \bigwedge_{j<m} C_j$$
Aufgrund des Distributibgesetzes setzen wir nun
$$\mathsf{KNF}(B \vee C) := \bigwedge_{i<n} \bigwedge_{j<m} (B_i \vee C_j)$$
Man beachte, dass $B_i \vee C_j$ für alle $i < n$ und $j < m$ eine Klausel ist.
(Andere Beschreibungen sind möglich, Hauptsache man verwendet die Distributivgesetze.)

4. [3 PUNKTE] $A = \neg B$: Hier muss B atomar sein, da A nach Voraussetzung in NNF vorliegt. Wir setzen
$$\mathsf{KNF}(\neg B) := \neg B$$

Hausaufgabe 7 [16 PUNKTE]

1. [8 PUNKTE] Verwenden Sie das Davis-Putnam-Verfahren aus der Vorlesung um zu bestimmen, ob folgende aussagenlogische Formel erfüllbar ist. Verwenden Sie dabei die Unit-Regel immer, wenn dies möglich ist. Die übrigen Regeln dürfen Sie nach Belieben verwenden. Notieren Sie in jedem Schritt, welche Regel Sie angewendet haben.
$$(p \vee q \vee r) \wedge s \wedge (s \vee \neg q \vee \neg t) \wedge (t \vee \neg s \vee \neg q) \wedge (q \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee \neg s)$$
$$\wedge (s \vee \neg t \vee p) \wedge (t \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee p)$$

2. [8 PUNKTE] Zeigen Sie mithilfe der graphischen Resolutionsmethode, dass
$$\big\{(\neg r \vee s \vee \neg p), (\neg q \vee \neg t \vee \neg p), (q \vee \neg r), (r \vee t), (r \vee q \vee \neg p), (\neg q \vee \neg s \vee \neg p)\big\} \models \neg p$$
gilt. Denken Sie daran, dass die einzige Beweisregel im Resolutionskalkül die Resolvente ist.

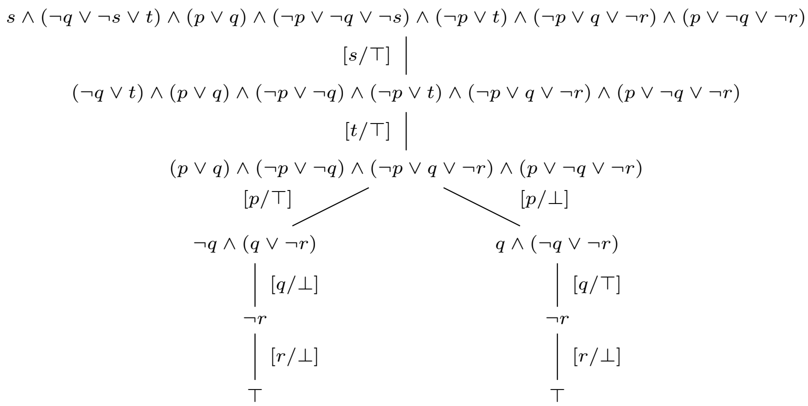
Lösungsvorschlag:

1. Die Formel liegt in KNF vor. Zur besseren Übersichtlichkeit ordnen wir die Klauseln alphabetisch und entfernen zwei durch s und eine durch $p \vee q$ subsumierte Klauseln:

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & s \wedge (\neg q \vee \neg s \vee t) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee t) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \arrow[d, dash, "{[s/\top]}"'] & \\
 & (\neg q \vee t) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee t) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \arrow[dl, dash, "{[q/\bot]}"'] \arrow[dr, dash, "{[q/\top]}"] & \\
p \wedge (\neg p \vee t) \wedge (\neg p \vee \neg r) \arrow[d, dash, "{[p/\top]}"] & & t \wedge \neg p \wedge (\neg p \vee t) \wedge (p \vee \neg r) \arrow[d, dash, "{[t/\bot]}"] \\
t \wedge \neg r \arrow[d, dash, "{[t/\top]}"] & & \neg p \wedge (p \vee \neg r) \arrow[d, dash, "{[t/\top]}"] \\
\neg r \arrow[d, dash, "{[r/\bot]}"] & & \neg r \arrow[d, dash, "{[r/\bot]}"] \\
\top & & \top
\end{tikzcd}$$

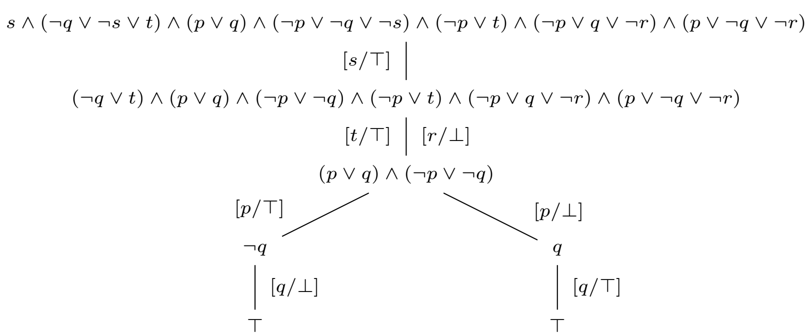
Abgesehen von einer Splitting-Regel werden nur Unit-Regeln angewendet. Wir wollen $\neg p$ als Resolvente der Prämissen nachweisen: Subsumierte und tautologische Klauseln werden sofort entfernt:

Alternativ:



Die einzige Anwendung der Splitting-Regel erfolgt in Schitt 3, zuvor wird die Pure-Literal-Regel für t angewendet.

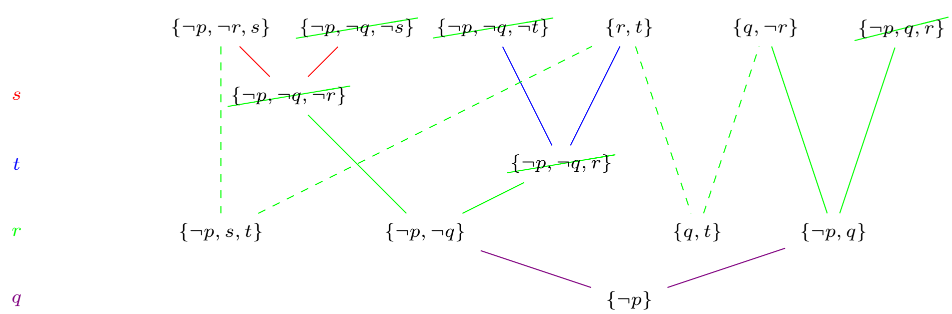
In Schritt 2 wäre die Pure-Literal-Regel auch für $\neg r$ anwendbar gewesen. Es ist sogar möglich, mehrere Pure-Literal-Regeln parallel anzuwenden:



Sollten mehrere Unit-Regeln greifen, können auch diese parallel angewendet werden.

2. Man beachte, dass die Schlußfolgerung $\neg p$ selber eine Klausel ist. Ziel ist es daher, $\{\neg p\}$ als Resolvente zu finden. Es ist zwar möglich, aber ineffizient, die Unerfüllbarkeit der Prämissen zusammen mit der negierten Schlußfolgerung p nachzuweisen.

   Zufällige Wahl der Reihenfolge der Atome:



   Rückblickend hätte man sich die Resolventen $\{\neg p, s, t\}$ sowie $\{q, t\}$ sparen können.

Hausaufgabe 8 [13 PUNKTE]

Im Folgenden fassen wir Klauseln als Mengen von Literalen auf. Wenn n Atome zur Verfügung stehen, wieviele verschiedene Klauseln kann man formen,

(a) [3 PUNKTE] in denen jedes Atom höchstens einmal auftritt?

(b) [3 PUNKTE] in denen maximal zwei Literale auftreten und deren Atome verschieden sind?

(c) [3 PUNKTE] in denen maximal drei Literale auftreten und deren Atome verschieden sind?

[4 PUNKTE] Was schließen Sie daraus für die Anzahl der Schritte bei der Resolutionsmethode, wenn die Ausgangsformel in KNF nur Klauseln enthält, die den Bedingungen (b) bzw. (c) genügen?

Lösungsvorschlag:

(a) Jedes Atom kann als positives Literal, als negatives Literal oder gar nicht auftreten. Also gibt es 3^n Möglichkeiten (das schließt den Fall des neutralen Elements $\top$ für die Disjunktion mit ein).

(b) Bei genau zwei Literalen pro Klausel stehen $2n$ Möglichkeiten für das erste Literal und $2n-2$ für das zweite Literal zur Verfügung (die Variablen sollen verschieden sein); da die Reihenfolge keine Rolle spielt, gibt es also $n(2n-2) = 2n^2 - 2n$ Möglichkeiten. Dazu kommen noch $2n$ Klauseln mit genau einem Literal und eine Klausel ohne Literal, also $\top$. Zusammen sind das $2n^2 + 1$ viele KLauseln.

(c) Bei genau drei Literalen und Atomen stehen $2n$ für das erste Literal, $2n-2$ für das zweite Literal, und $2n-4$ für das dritte Literal zur Verfügung; da die Reihenfolge keine Rolle spielt, gibt es also $n(2n-2)(2n-4)/3$ Möglichkeiten. Dazu kommen noch die $2n^2+1$ vielen KLauseln aus Teil (b), insgesamt also $(4n^3 - 6n^2 + 8n + 3)/3$ viele Klauseln.

In Teil (b) bleibt die Länge der Resolventen durch 2 beschränkt, daher ist die Anzahl der Schritte durch ein quadratisches Polynom in n beschränkt, nämlich $2n^2 + 1$.

In Teil (c) können Resolventen der Länge > 3 entstehen, insofern gibt die Anzahl der Klauseln der Länge ≤ 3 hier keine Schranke für die Schrittzahl. In der Tat, kann die Anzahl der Schritte exponentiell mit n wachsen.