Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Logik
Aufgabenblatt 2

Jens Gutsfeld,
Sören van der Wall Abgabe bis Fr, 10. Mai 2024 um 23:59

Aufgabe 2.1 (Anwendung des Kompaktheitssatzes — **10 Pkt**)
Ein (einfacher, unendlicher) Graph $G = (V, E)$ ist vierfärbbar, falls es eine Färbung $c : V \to \{0, 1, 2, 3\}$ der Knoten gibt, sodass für alle Kanten $(u, v) \in E$ gilt: $c(u) \neq c(v)$.

Ein endlicher Teilgraph G' von G ist $G' = (V', E')$, sodass $V' \subseteq V$ mit $|V'| < \infty$ und $E' \subseteq V' \times V' \cap E$.

Zeigen Sie: Ein Graph ist vierfärbbar genau dann, wenn jeder endliche Teilgraph vierfärbbar ist.
Hinweis: Sie müssen die Färbungsfunktion in aussagenlogischen Variablen kodieren. Zum Beispiel könnten Sie für einen Knoten v eine Variable v_3 wählen, die besagt, dass v von der Färbung die Farbe 3 *zugewiesen bekommt.*

Aufgabe 2.2 (Inkonsistenzsatz für $\mathcal{F}_0$ — **10Pkt**)
Aus der Korrektheit und Vollständigkeit von $\mathcal{F}_0$ ergibt sich, dass die Inkonsistenzregel auch für $\mathcal{F}_0$ gelten muss. Sie lässt sich jedoch auch zeigen, ohne vorher Vollständigkeit zu zeigen. Beweisen Sie also ohne Verwendung der Vollständigkeit von $\mathcal{F}_0$:

$$\Sigma \vdash A \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad \Sigma \cup \{\neg A\} \text{ inkonsistent}$$

Aufgabe 2.3 (Beweisen in $\mathcal{F}_0$ — **3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15 Pkt**)
In dieser Aufgabe dürfen Sie

$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \to (B \to A)$	Ax1
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	Ax2
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$	Ax3
$\vdash_{\mathcal{F}_0} \neg\neg A \to A$	Bsp 2.11
$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \to A$	Lem 0
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$	Lem 1
$\vdash_{\mathcal{F}_0} \neg B \to (B \to A)$	Lem 2
$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \to \neg\neg A$	Lem 3
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	Lem 4
$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$	Lem 5
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$	Lem 6
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (B \to A) \to ((\neg B \to A) \to A)$	Lem 7

verwenden, sowie das Deduktionstheorem und die Inkonsistenzregel. Nicht jedoch den Vollständigkeitssatz.
Beweisen Sie:

a) $\vdash_{\mathcal{F}_0} q \to (r \to (p \to q))$

b) $\neg(q \to p) \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg p.$

c) $\vdash_{\mathcal{F}_0} \neg(p \to p) \to \neg(p \to q)$

d) $q, r \to \neg q \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg r$

e) $p \to (\neg q \to r), (\neg q \to r) \to (p \to \neg q), \neg r \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg p$

Aufgabe 2.4 (Vollständige Junktorenmengen — **2 + 5 + 2 + 6 = 15 Pkt**)
Für eine Menge M von Junktoren sei $F(M)$ die Menge der Formeln, in denen nur Junktoren aus M vorkommen. Zum Beispiel ist die Menge aller aussagenlogischer Formeln $F(\{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\})$. Eine Menge M von Junktoren heißt vollständig, wenn es für jede Formel $A \in F$ eine logisch äquivalente Formel $B \in F(M)$ gibt.

a) Wir wollen zeigen, dass die Menge $F(\vee, \wedge)$ nur erfüllbare Formeln enthält. Erklären Sie, warum es für eine Induktion nicht reicht, als Induktionsvorraussetzung anzunehmen, dass bereits alle echten Teilformeln von A erfüllbar sind.

b) Stattdessen müssen wir eine stärkere Aussage per Induktion beweisen: Finden Sie eine Belegung der Variablen φ, deren Bewertung alle Formeln in $F(\vee, \wedge)$ erfüllt und beweisen Sie diese Eigenschaft durch Induktion.

c) Zeigen Sie: $\{\vee, \wedge\}$ ist keine vollständige Operatorenmenge.

d) Sei $\barwedge$("NAND") ein Junktor, dessen Definition für Bewertungen φ ist:

$$\varphi(A \barwedge B) = 1 - \min\{\varphi(A), \varphi(B)\}.$$

Zeigen Sie mittels struktureller Induktion, dass die Menge $\{\barwedge\}$ eine vollständige Junktorenmenge ist.