Prof. Dr. Roland Meyer
Sebastian Muskalla, Peter Chini

Theoretische Informatik II
Aufgabenblatt 3

TU Braunschweig
Sommersemester 2017

Ausgabe: 3. Mai — Abgabe: 11. Mai

Werfen Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, 11. Mai, 12:00 Uhr in die Abgabekästen im Informatikzentrum neben Büro 343. Geben Sie zu dritt oder zu viert ab.

Aufgabe 1: Co-Semi-Entscheidbarkeit
Sei $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ ein Problem (d.h. eine Sprache, bei der wir die Elemente $w \in \mathcal{L}$ als Ja-Instanzen auffassen). Das **Komplementproblem** von $\mathcal{L}$ ist $\overline{\mathcal{L}} = \Sigma^* \setminus \mathcal{L}$.

Wir nennen ein Problem $\mathcal{L}$ **co-semi-entscheidbar**, wenn sein Komplementproblem $\overline{\mathcal{L}}$ semi-entscheidbar ist.

a) Beweisen Sie: Wenn ein Problem $\mathcal{L}$ entscheidbar ist, dann ist auch sein Komplementproblem $\overline{\mathcal{L}}$ entscheidbar.

b) Sei $\mathcal{L}$ ein Problem, dass sowohl semi-entscheidbar, als auch co-semi-entscheidbar ist.

   Beweisen Sie, dass $\mathcal{L}$ dann entscheidbar ist.

   Hinweis: Konstruieren Sie einen Entscheider für $\mathcal{L}$, der die Turing-Maschinen für $\mathcal{L}$ und $\overline{\mathcal{L}}$ verwendet.

c) Schlussfolgern Sie, dass ein Problem genau dann entscheidbar ist, wenn es sowohl semi-entscheidbar, als auch co-semi-entscheidbar ist.

Aufgabe 2: Operationen auf Sprachen und Entscheidbarkeit
Es seien $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subseteq \Sigma^*$ entscheidbare Sprachen.

Beweisen Sie:

a) Die Vereinigung $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ ist entscheidbar.

b) Der Schnitt $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ ist entscheidbar.

c) Die Konkatenation $\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2 = \left\{ ww' \in \Sigma^* \;\middle|\; w \in \mathcal{L}_1, w' \in \mathcal{L}_2 \right\}$ ist entscheidbar.

Geben Sie dabei jeweils an, wie man einen Entscheider für die Sprachen konstruiert, und erläutern dessen Arbeitsweise. Eine formale Konstruktion und eine Angabe als Tupel ist hierbei nicht notwendig.

Hinweis: Die Bearbeitung dieser Aufgabe wird teilweise einfacher, wenn Sie Mehrband-Turing-Maschinen und Nichtdeterminismus verwenden.

Aufgabe 3: Turing-Maschinen als Berechner

Bislang haben wir Turing-Maschinen nur als (Semi-)Entscheider betrachtet, die für eine Eingabe eine Ja/Nein-Antwort geben. Wir können Turing-Maschinen auch zum Berechnen von Funktionen verwenden. Dazu nehmen wir an, dass die Turing-Maschine mindestens zwei Bänder hat:

- Das erste Band ist das Eingabe-Band, auf dem die unverändert Eingabe stehen bleibt.
- Das letzte Band ist das Ausgabe-Band, auf dem wenn die Maschine hält, die Ausgabe steht.

Wir nehmen an, dass die Turing-Maschine statt den Zuständen q_{acc} und q_{rej} einen einzigen Haltezustand q_{halt} hat.

Eine solche (deterministische) Turing-Maschine M **berechnet** eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$, wenn zu jeder Eingabe $w \in \Sigma^*$ die Berechnung von M nach endlich vielen Schritten den Zustand q_{halt} erreicht und zu diesem Zeitpunkt $f(w)$ auf dem Ausgabeband steht.

a) Konstruieren Sie eine Turing-Maschine, die einen **binären Inkrement** implementiert. Das heißt, die Turing-Maschine nimmt als Eingabe ein Wort $w \in \{0,1\}^*$, welches die Binärdarstellung einer Zahl i ist, und berechnet eine Binärdarstellung w' der Zahl $i + 1$.

   Der Einfachheit halber ist es sinnvoll hier – anders als üblich – eine **least significant bit first (lsbf)** Darstellung zu wählen, d.h. z.B. $6_{10} = 011_2$.

b) Konstruieren Sie eine Turing-Maschine, die als Eingabe eine Sequenz

$$1^n = \underbrace{1 \dots 1}_{n \text{ Mal}} \in \{1\}^*$$

   von n Einsen erhält, und $bin(n)$, eine lsbf-Binärdarstellung von n, berechnet.

   Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe a).

Geben Sie für beide Teilaufgaben die Maschine jeweils sowohl formal als Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$ als auch eine ausführliche Beschreibung der Arbeitsweise von M an.

Aufgabe 4: Eine nicht-deterministische Turing-Maschine

Betrachten Sie die nicht-deterministische 3-Band-Turing-Maschine:

$$M = \left(Q, \{a, b\}, \{a, b, \$, \sqcup\}, \delta, q_{init}\right),$$

wobei $Q = \{q_{init}, q_{run}, q_{accept}, q_{reject}\}$ ist und δ auf Seite 3 des Übungsblatts angegeben ist.

a) Geben sie die Sprache $\mathcal{L}(M)$ an und erläutern Sie die Arbeitsweise von M detailliert.

b) Zeigen Sie, dass M kein Entscheider ist, also nicht auf allen Berechnungen zu allen Eingaben hält.

c) Wie kann man M modifizieren, so dass die akzeptierte Sprache unverändert bleibt, aber M zu einem Entscheider wird?

Transitionsfunktion δ für Aufgabe 4:

Beachten Sie, dass M nicht-deterministisch ist, und damit die Transitionsfunktion die Signatur

$$\delta\colon Q \times \Gamma^3 \to \mathcal{P}\Big(Q \times \Gamma^3 \times \{L, S, R\}^3\Big)$$

hat.

$$\left(q_{init}, \begin{pmatrix} \$ \\ \$ \\ \$ \end{pmatrix}\right) \overset{\delta}{\mapsto} \left\{ \left(q_{init}, \begin{pmatrix} \$ \\ \$ \\ \$ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S \\ R \\ R \end{pmatrix}\right) \right\}$$

$$\left(q_{init}, \begin{pmatrix} \$ \\ \llcorner\!\lrcorner \\ \llcorner\!\lrcorner \end{pmatrix}\right) \overset{\delta}{\mapsto} \left\{ \left(q_{init}, \begin{pmatrix} \$ \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S \\ R \\ R \end{pmatrix}\right), \left(q_{run}, \begin{pmatrix} \$ \\ \llcorner\!\lrcorner \\ \llcorner\!\lrcorner \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ L \\ L \end{pmatrix}\right) \right\}$$

$$\left(q_{run}, \begin{pmatrix} a \\ a \\ \star \end{pmatrix}\right) \overset{\delta}{\mapsto} \left\{ \left(q_{run}, \begin{pmatrix} a \\ a \\ \star \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ L \\ S \end{pmatrix}\right) \right\}$$

$$\left(q_{run}, \begin{pmatrix} b \\ \star \\ b \end{pmatrix}\right) \overset{\delta}{\mapsto} \left\{ \left(q_{run}, \begin{pmatrix} b \\ \star \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ S \\ L \end{pmatrix}\right) \right\}$$

$$\left(q_{run}, \begin{pmatrix} \llcorner\!\lrcorner \\ \$ \\ \$ \end{pmatrix}\right) \overset{\delta}{\mapsto} \left\{ \left(q_{accept}, \begin{pmatrix} \llcorner\!\lrcorner \\ \$ \\ \$ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S \\ S \\ S \end{pmatrix}\right) \right\}$$

$$\left(q_{run}, \begin{pmatrix} \llcorner\!\lrcorner \\ \circ \\ \star \end{pmatrix}\right) \overset{\delta}{\mapsto} \left\{ \left(q_{reject}, \begin{pmatrix} \llcorner\!\lrcorner \\ \circ \\ \star \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S \\ S \\ S \end{pmatrix}\right) \right\}$$

Hierbei sind $\star$ und $\circ$ Platzhalter für beliebige Bandsymbole, in der letzten angegeben Transition dürfen allerdings nicht beide gleichzeitig \$ sein. (Dieser Fall wird von der vorletzten Transition abgedeckt.)