Theoretische Informatik II
Aufgabenblatt 6

Prof. Dr. Roland Meyer
Sebastian Muskalla, Peter Chini
TU Braunschweig
Sommersemester 2017

Ausgabe: 21. Juni — Abgabe: 29. Juni

Werfen Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, 29. Juni, 12:00 Uhr in die Abgabekästen im Informatikzentrum neben Büro 343. Geben Sie zu dritt oder zu viert ab.

Aufgabe 1: Härte und Vollständigkeit

Beweisen Sie die folgenden Lemmata aus der Vorlesung:

a) Sei $\mathcal{C}$ eine Komplexitätsklasse, R eine Menge von Funktionen und $\mathcal{L} \in \mathcal{C}$ ein Problem. Wenn $\mathcal{L}$ $\mathcal{C}$-hart/vollständig ist, dann ist $\overline{\mathcal{L}}$ co$\mathcal{C}$-hart/vollständig (jeweils bezüglich R-many-one-Reduktionen).

b) Seien $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ Probleme mit $\mathcal{L} \leq_m^{log} \mathcal{L}'$. Wenn $\mathcal{L}'$ in NL ist, dann auch $\mathcal{L}$.

Hinweis: Wie in der Vorlesung angemerkt ist die Ausgabe $f(x)$ einer logspace-Reduktion höchstens polynomiell groß, d.h. es gibt einen konstanten Exponenten $k \in N$ mit $\left|f(x)\right| \in \mathcal{O}\left(|x|^k\right)$.

Aufgabe 2: Vollständigkeit in L

Sei Σ ein endliches Alphabet. Beweisen Sie:

a) Ein Problem $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ ist in L genau dann, wenn $\mathcal{L} \leq_m^{log} \{1\}$.
Hier bezeichnet $\{1\}$ die Sprache $\{1\} \subseteq \{0,1\}^*$.

b) Jede Sprache $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ in L mit $\mathcal{L} \neq \varnothing$ und $\mathcal{L} \neq \Sigma^*$ ist bereits L-vollständig (bezüglich logspace-many-one-Reduktionen).

Aufgabe 3: Erreichbarkeit in azyklischen Graphen

a) Betrachten Sie das folgende aus der Vorlesung bekannte Problem.

Pfadexistenz in azyklischen Graphen (ACYCLICPATH)	
Gegeben:	Gerichteter azyklischer Graph $G = (V, R)$, Knoten $s, t \in V$
Entscheide:	Gibt es einen Pfad von s nach t in G?

Zeigen Sie, dass sich das Problem PATH auf ACYCLICPATH mit einer logspace-many-one Reduktion reduzieren lässt. Geben Sie die Funktion explizit an und beweisen Sie, dass sie eine Reduktion ist.

b) Beim Problem ACYCLICPATH nehmen wir an, dass die Eingabe ein azyklischer Graph ist. Wir wollen nun für einen gegebenen Graphen feststellen, ob er diese Eigenschaft hat.

Azyklizität (ACYCLIC)	
Gegeben:	Gerichteter Graph $G = (V, R)$
Entscheide:	Ist G azyklisch?

Beweisen Sie, dass ACYCLIC selbst bereits NL-vollständig ist.

Hinweis: Reduzieren Sie ACYCLICPATH auf $\overline{\text{ACYCLIC}}$ und verwenden Sie den Satz von Immerman und Szelepcsényi.

Aufgabe 4: 2SAT

Wir haben in der Vorlesung bewiesen, dass 2SAT coNL-vollständig ist, in dem wir $\overline{\text{ACYCLICPATH}}$ auf 2SAT reduzierten. In dieser Aufgabe wollen wir die Korrektheit dieser Reduktion nachweisen.

Sei G ein azyklischer Graph und s, t Knoten. Wir konstruieren eine Formel F in 2CNF wie folgt: Für jede Kante $x \to y$ im Graphen fügen wir die Klausel $(\neg x \vee y)$ hinzu. Darüber hinaus erzeugen wir die beiden Klauseln (s) und $(\neg t)$.

Beweisen Sie:

$$F \text{ ist erfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad \text{es gibt keinen Pfad von } s \text{ nach } t \text{ in } G\,.$$