Prof. Dr. Roland Meyer
Sebastian Muskalla, Peter Chini

Theoretische Informatik II
Aufgabenblatt 7

TU Braunschweig
Sommersemester 2017

Ausgabe: 6. Juli — Abgabe: keine

Dieses Blatt beinhaltet zusätzliche Aufgaben zur Vorbereitung auf die Klausur. Es soll nicht abgegeben werden und wird nicht bewertet. Wir werden die Aufgaben in einer freiwilligen Großübung am Dienstag, dem 11. Juli, um 17 Uhr in Raum PK2.2 vorrechnen.

Aufgabe 1: Ein Fixpunkt

Sei Σ ein Alphabet. Betrachten Sie den vollständigen Verband $(\mathcal{P}(\Sigma^*), \subseteq)$ aller Sprachen über Σ, geordnet durch Inklusion.

Wir definieren die Funktion f wie folgt.

$$\begin{array}{rcl} f \;:\; \mathcal{P}(\Sigma^*) & \rightarrow & \mathcal{P}(\Sigma^*) \\ X & \mapsto & (a \cup b).X \cup X \cup b \end{array}$$

Hierbei sind $a, b \in \Sigma$, und wir schreiben a für die Singleton-Sprache $\{a\}$ (analog für b).

a) Zeigen Sie, dass f monoton ist.

b) Lässt sich der Satz von Kleene verwenden, um den kleinsten Fixpunkt von f zu bestimmen?

c) Bestimmen Sie den kleinsten und größten Fixpunkt von f.

Aufgabe 2: Datenflussanalyse

Gegeben sei das folgende Programm.

$[x := 5]^1$
$[y := 2]^2$
while $[x > y]^3$ **do**
    $[x := x + 1]^4$
    $[y := y + 2]^5$
end while
$[\mathit{skip}]^6$

a) Konstruieren Sie den Kontrollflussgraphen G zu diesem Programm.

b) Betrachten Sie den Potenzmengenverband $(D, \leqslant) = (\mathcal{P}(\{x, y\} \times \{o, e\}), \subseteq)$. Intuitiv bedeutet (x, o), dass der Wert von Variable x eine ungerade Zahl ist (o steht für odd, analog e für even, gerade). Geben Sie zu den Blöcken 1 - 6 geeignete Transferfunktionen TF über diesem Verband an.

c) Betrachten Sie das Datenflusssystem $(G, (D, \leqslant), \varnothing, TF)$ mit TF aus Teil b) der Aufgabe.

   Geben Sie das induzierte Gleichungssystem an und bestimmen Sie seine kleinste Lösung mit dem Satz von Kleene.

   Welche Information können wir dieser Lösung entnehmen?

Aufgabe 3: Sprachäquivalenz

Wir betrachten das Problem der Sprachäquivalenz von Turing-Maschinen.

Sprachäquivalenz (TM-EQUIVALENCE)	
Gegeben:	Turing-Maschinen M_1, M_2
Entscheide:	Gilt $\mathcal{L}(M_1) = \mathcal{L}(M_2)$?

a) Formulieren Sie TM-EQUIVALENCE als Wortproblem.

b) Beweisen Sie: TM-EQUIVALENCE ist nicht semi-entscheidbar.

c) Beweisen Sie: TM-EQUIVALENCE ist nicht co-semi-entscheidbar.

Aufgabe 4: Triple cycle cover

Wir betrachten das folgende Graphproblem.

Triple cycle cover (TCC)	
Gegeben:	Graph G
Entscheide:	Kann G durch drei disjunkte einfache Kreise überdeckt werden?

Hiermit ist gemeint, dass es in G einfache Pfade (ohne Knotenwiederholung)

$$\begin{gathered} v_1^{(1)} \to v_2^{(1)} \to \ldots \to v_k^{(1)} \to v_1^{(1)} \\ v_1^{(2)} \to v_2^{(2)} \to \ldots \to v_\ell^{(2)} \to v_1^{(2)} \\ v_1^{(3)} \to v_2^{(3)} \to \ldots \to v_s^{(3)} \to v_1^{(3)} \end{gathered}$$

gibt, die Kreise sind (also beim selben Knoten starten und enden), so dass jeder Knoten $v \in V(G)$ als genau ein $v_i^{(j)}$ auftritt.

Beweisen Sie: TCC ist NP-vollständig (bezüglich Polynomialzeit-Reduktionen).

Aufgabe 5: Entailment

Wir betrachten das folgende Problem für aussagenlogische Formeln.

Implikationstest (ENTAILMENT)	
Gegeben:	Aussagenlogische Formeln F, F' in CNF
Entscheide:	Impliziert die Formel F die Formel F'?

Beweisen Sie: ENTAILMENT ist coNP-vollständig (bezüglich Polynomialzeit-Reduktionen).

Beweisen Sie zunächst, dass VALIDITY coNP-vollständig ist, und reduzieren SIe dann VALIDITY in Polynomialzeit auf ENTAILMENT.

Allgemeingültigkeit (VALIDITY)	
Gegeben:	Aussagenlogische Formel F in CNF
Entscheide:	Ist F allgemeingültig, also eine Tautologie?

Hinweis: Mit Hilfe der Tseitin-Transformation lässt sich in Polynomialzeit zu einer beliebigen aussagenlogischen Formel eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in CNF berechnen.

Aufgabe 6: Orakelmaschinen

Orakelmaschinen sind eine Variante von Turing-Maschinen. Die Idee ist, dass eine Orkalmaschine eine Entscheidungsanfrage für ein vorgegebenes Problem mit Hilfe eines Orakels in nur einem Schritt beantworten kann.

Formal hat eine Orakelmaschine ein zusätzliches **Orakelband** und drei spezielle Zustände q_{query}, q_{yes}, q_{no}. Eine Orakelmaschine M mit Orakel für Problem $\mathcal{D}$ verhält sich wie folgt: Wenn sie in einer Berechnung den Zustand q_{query} betritt, wechselt sie danach in den Zustand q_{yes} oder q_{no}, abhängig davon ob der Inhalt des Orakelbands zu diesem Zeitpunkt eine Ja-Instanz von $\mathcal{D}$ ist oder nicht. Dabei wird der Inhalt des Orakelbands gelöscht. Bei der Messung des Zeitverbrauchs von M wird die Orakelanfrage als nur ein Schritt gezählt.

Beweisen Sie: Wenn sich ein Problem $\mathcal{L}$ von einer (deterministischen) Orkalmaschine mit einem Orakel für ein Problem $\mathcal{D} \in \mathrm{P}$ in Polynomialzeit entscheiden lässt, dann gilt $\mathcal{L} \in \mathrm{P}$.

Zeigen, wie sich das Problem STRONGLY-CONNECTED durch eine deterministische Orakelmaschine mit einem Orkal für PATH in logarithmischem Platz entscheiden lässt.

Starker Zusammenhang in einem Graph (STRONGLY-CONNECTED)	
Gegeben:	Gerichteter Graph $G = (V, R)$
Entscheide:	Gibt es für jedes Paar Knoten $s, t \in V$ einen Pfad $s \rightarrow^* t$ in G?