Sommersemester 2018 02.05.2018

Übungen zur Vorlesung
Theoretische Informatik II
Blatt 3

Prof. Dr. Roland Meyer, M. Sc. Elisabeth Neumann Abgabe bis 9.05.2018 um 12:00

Aufgabe 3.1 (Operationen auf Sprachen und Entscheidbarkeit)
Es seien $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subseteq \Sigma^*$ entscheidbare Sprachen.
Beweisen Sie:

a) Die Vereinigung $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ ist entscheidbar.

b) Der Schnitt $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ ist entscheidbar.

c) Die Konkatenation $\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2 = \{ww' \in \Sigma^* \mid w \in \mathcal{L}_1, w' \in \mathcal{L}_2\}$ ist entscheidbar.

Geben Sie dabei jeweils an, wie man einen Entscheider für die Sprachen konstruiert, und erläutern dessen Arbeitsweise. Eine formale Konstruktion und eine Angabe als Tupel ist hierbei nicht notwendig.
Hinweis: Die Bearbeitung dieser Aufgabe wird teilweise einfacher, wenn Sie Mehrband-Turing-Maschinen und Nichtdeterminismus verwenden.

Aufgabe 3.2 (Ein nicht-semi-entscheidbares Problem)
In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass das Akzeptanzproblem unentscheidbar ist. Nun wollen wir ein Problem kennenlernen, das nicht einmal semi-entscheidbar ist.

Non-Self-Acceptance **Gegeben:** Turing-Maschine M mit Eingabealphabet $\{0,1\}$ **Entscheide:** Akzeptiert M ihre eigene Kodierung $\langle M \rangle$ nicht?

Als Sprache lässt sich das Problem wie folgt auffassen:

$\mathcal{L}_{NSA} = \{w \in \{0,1\}^* \mid$ Die von w codierte Turing-Maschine akzeptiert w nicht, d.h. $w \notin \mathsf{M_w}\}$.

a) Beweisen Sie unter Verwendung von Diagonalisierung, dass $\mathcal{L}_{NSA}$ nicht semi-entscheidbar ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}_{NSA}$ co-semi-entscheidbar ist, d.h. beweisen Sie, dass das Komplementproblem semi-entscheidbar ist.

Aufgabe 3.3

Betrachten Sie die nicht-deterministische 3-Band-Turing-Maschine:

$$M = (Q, \{a, b\}, \{a, b, \text{\textvisiblespace}\}, q_{init}, \delta, \{q_{accept}, q_{reject}\}),$$

wobei $Q = \{q_{init}, q_1, q_2, q_{run}, q_{accept}, q_{reject}\}$ ist und δ auf Seite 3 des Übungsblatts angegeben ist.

a) Geben sie die Sprache M an und erläutern Sie die Arbeitsweise von M detailliert.

b) Zeigen Sie, dass M kein Entscheider ist, also nicht auf allen Berechnungen zu allen Eingaben hält.

c) Wie kann man M modifizieren, so dass die akzeptierte Sprache unverändert bleibt, aber M zu einem Entscheider wird?

Aufgabe 3.4 (Von-Neumann-Architektur)
Informieren Sie sich über die Von-Neumann-Architektur.
In dieser Aufgabe sollen sollen Sie ausarbeiten, in wie fern sich die Konzepte der universellen Turing-Maschine in diesem Modell wiederfinden lassen.
Welche der Komponenten haben eine direkte Entsprechung in der universelle Turing-Maschine, und wie ist diese Entsprechung? Was ist mit den sonstigen Komponenten?
In wie fern entspricht der Ablauf eines Programms in der Von-Neumann-Architektur einem Lauf einer universellen Turing-Maschine?

Transitionsfunktion δ für Aufgabe 3:
Beachten Sie, dass M nicht-deterministisch ist, und damit die Transitionsfunktion die Signatur

$$\delta\colon Q \times \Gamma^3 \to \mathcal{P}\left(Q \times \Gamma^3 \times \{L, S, R\}^3\right)$$

hat.

$$\left(q_{init}, \begin{pmatrix} \textvisiblespace \\ \textvisiblespace \\ \textvisiblespace \end{pmatrix}\right) \overset{\delta}{\mapsto} \left\{ \left(q_{accept}, \begin{pmatrix} \textvisiblespace \\ \textvisiblespace \\ \textvisiblespace \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N \\ N \\ N \end{pmatrix}\right)\right\}$$

$$\left(q_{init}, \begin{pmatrix} a/b \\ \textvisiblespace \\ \textvisiblespace \end{pmatrix}\right) \overset{\delta}{\mapsto} \left\{ \left(q_1, \begin{pmatrix} a/b \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N \\ R \\ R \end{pmatrix}\right)\right\}$$

$$\left(q_1, \begin{pmatrix} a/b \\ \textvisiblespace \\ \textvisiblespace \end{pmatrix}\right) \overset{\delta}{\mapsto} \left\{ \left(q_2, \begin{pmatrix} a/b \\ a \\ \textvisiblespace \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N \\ R \\ N \end{pmatrix}\right)\right\}$$

$$\left(q_2, \begin{pmatrix} a/b \\ \textvisiblespace \\ \textvisiblespace \end{pmatrix}\right) \overset{\delta}{\mapsto} \left\{ \left(q_1, \begin{pmatrix} a/b \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N \\ R \\ R \end{pmatrix}\right), \left(q_{run}, \begin{pmatrix} a/b \\ \textvisiblespace \\ \textvisiblespace \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N \\ L \\ L \end{pmatrix}\right)\right\}$$

$$\left(q_{run}, \begin{pmatrix} a \\ a \\ \star \end{pmatrix}\right) \overset{\delta}{\mapsto} \left\{ \left(q_{run}, \begin{pmatrix} a \\ a \\ \star \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ L \\ N \end{pmatrix}\right)\right\}$$

$$\left(q_{run}, \begin{pmatrix} b \\ \star \\ b \end{pmatrix}\right) \overset{\delta}{\mapsto} \left\{ \left(q_{run}, \begin{pmatrix} b \\ \star \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ N \\ L \end{pmatrix}\right)\right\}$$

$$\left(q_{run}, \begin{pmatrix} \textvisiblespace \\ \textvisiblespace \\ \textvisiblespace \end{pmatrix}\right) \overset{\delta}{\mapsto} \left\{ \left(q_{accept}, \begin{pmatrix} \textvisiblespace \\ \textvisiblespace \\ \textvisiblespace \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N \\ N \\ N \end{pmatrix}\right)\right\}$$

$$\left(q_{run}, \begin{pmatrix} \textvisiblespace \\ \circ \\ \star \end{pmatrix}\right) \overset{\delta}{\mapsto} \left\{ \left(q_{reject}, \begin{pmatrix} \textvisiblespace \\ \circ \\ \star \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N \\ N \\ N \end{pmatrix}\right)\right\}$$

Hierbei sind $\star$ und $\circ$ Platzhalter für beliebige Bandsymbole, in der letzten angegeben Transition dürfen allerdings nicht beide gleichzeitig $\textvisiblespace$ sein. (Dieser Fall wird von der vorletzten Transition abgedeckt.)

Abgabe bis 9.05.2018 um 12:00 im Kasten neben Raum 343.