Sommersemester 2018 05.06.2018

Übungen zur Vorlesung
Theoretische Informatik II
Blatt 5

Prof. Dr. Roland Meyer, M. Sc. Elisabeth Neumann Abgabe bis 13.06.2018 um 12:00

Aufgabe 5.1 (Komplexität von COPY)
Wir definieren die Sprache

$$\mathrm{COPY} = \{w\#w \mid w \in \{a,b\}^*\} \subseteq \{a,b,\#\}^* \ .$$

a) Betrachten Sie den auf Seite 3 gegebenen Entscheider M für COPY (in Aufgabe 1b) des 1. Übungsblatts haben Sie bereits eine TM für COPY konstruiert). Analysieren Sie den Zeitverbrauch von dem Entscheider, bestimmen Sie also möglichst präzise eine Funktion $t\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die den Zeitverbrauch von M beschränkt.

b) Geben Sie einen deterministischen 2-Band Entscheider an, der COPY mit linearem Zeitverbrauch, also in $\mathcal{O}(n)$ vielen Schritten, entscheidet und begründen Sie warum die Zeitschranke eingehalten wird.

Bemerkung: Man kann beweisen, dass es mit einer 1-Band-DTM nicht möglich ist, COPY in linearer Zeit zu entscheiden.

c) Geben Sie einen deterministischen Entscheider an, der COPY mit logarithmischem Platzverbrauch, also mit $\mathcal{O}(\log n)$ viel Platz, entscheidet (eine Beschreibung als Algorithmus ist ausreichend) und begründen Sie warum die Platzschranke eingehalten wird.

Erinnerung: Hierfür betrachten wir Maschinen, mit einem read-only Eingabeband.

Aufgabe 5.2 (Härte und Vollständigkeit)
Beweisen Sie die folgenden Lemmata:

a) Sei $\mathcal{C}$ eine Komplexitätsklasse, R eine Menge von Funktionen und $\mathcal{L} \in \mathcal{C}$ ein Problem. Wenn $\mathcal{L}$ $\mathcal{C}$-hart/vollständig ist, dann ist $\overline{\mathcal{L}}$ co$\mathcal{C}$-hart/vollständig (jeweils bezüglich R-many-one-Reduktionen).

b) Seien $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ Probleme mit $\mathcal{L} \leq_m^{log} \mathcal{L}'$. Wenn $\mathcal{L}'$ in NL ist, dann auch $\mathcal{L}$.

Hinweis: Wie in der Vorlesung angemerkt ist die Ausgabe $f(x)$ einer logspace-Reduktion höchstens polynomiell groß, d.h. es gibt einen konstanten Exponenten $k \in N$ mit $|f(x)| \in \mathcal{O}(|x|^k)$.

Aufgabe 5.3 (Vollständigkeit in L)
Sei Σ ein endliches Alphabet. Beweisen Sie:

a) Ein Problem $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ ist in L genau dann, wenn $\mathcal{L} \leq_m^{log} \{1\}$.
Hier bezeichnet $\{1\}$ die Sprache $\{1\} \subseteq \{0,1\}^*$.

b) Jede Sprache $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ in L mit $\mathcal{L} \neq \emptyset$ und $\mathcal{L} \neq \Sigma^*$ ist bereits L-vollständig (bezüglich logspace-many-one-Reduktionen).

Aufgabe 5.4 (Erreichbarkeit in azyklischen Graphen)

a) Betrachten Sie das folgende, aus der Vorlesung bekannte Problem.

> <u>Pfadexistenz in azyklischen Graphen (ACYCLICPATH)</u>
> **Gegeben:** Gerichteter azyklischer Graph $G = (V, R)$, Knoten $s, t \in V$
> **Entscheide:** Gibt es einen Pfad von s nach t in G?

Zeigen Sie, dass sich das Problem PATH auf ACYCLICPATH mit einer logspace-many-one Reduktion reduzieren lässt. Geben Sie die Funktion explizit an und beweisen Sie, dass sie eine Reduktion ist.

b) Beim Problem ACYCLICPATH nehmen wir an, dass die Eingabe ein azyklischer Graph ist. Wir wollen nun für einen gegebenen Graphen feststellen, ob er diese Eigenschaft hat.

> <u>Azyklizität (ACYCLIC)</u>
> **Gegeben:** Gerichteter Graph $G = (V, R)$
> **Entscheide:** Ist G azyklisch?

Beweisen Sie, dass ACYCLIC selbst bereits NL-vollständig ist.

Hinweis: Reduzieren Sie $\mathsf{ACYCLICPATH}$ auf $\overline{\mathsf{ACYCLIC}}$ und verwenden Sie den Satz von Immerman und Szelepcsényi (NL = coNL).

Entscheider für Aufgabe 1a)

$$M = (Q, \{a, b, \#\}, \{a, b, \#, \llcorner\!\lrcorner, X\}, q_0, \delta, \{q_{acc}, q_{rej}\}) \ .$$

Hierbei ist die Zustandsmenge $Q = \{q_0, q_{acc}, q_{rej}, q_{finda}, q_{findb}, q_{seena}, q_{seenb}, q_{check}, q_{reset}\}$ und die Transitionsfunktion δ ist durch die Tabelle unten gegeben. Hierbei sind die Zeilen der Tabelle als $\delta(q, a) = (p, b, d)$ zu lesen. **Zustände q und Symbole a, die in der Tabelle keinen entsprechenden Eintrag haben, werden von der Maschine nicht verändert, die entsprechende Transition ist $\delta(q, a) = (q, a, R)$.**

q	a	p	b	d
q_0	a	q_{seena}	X	R
q_0	b	q_{seenb}	X	R
q_0	$\#$	q_{check}	X	R
q_0	$\llcorner\!\lrcorner$	q_{rej}	$\llcorner\!\lrcorner$	N
q_{seena}	$\#$	q_{finda}	$\#$	R
q_{seena}	$\llcorner\!\lrcorner$	q_{rej}	$\llcorner\!\lrcorner$	N
q_{seenb}	$\#$	q_{findb}	$\#$	R
q_{seenb}	$\llcorner\!\lrcorner$	q_{rej}	$\llcorner\!\lrcorner$	R
q_{finda}	$\#$	q_{rej}	$\#$	N
q_{finda}	$\llcorner\!\lrcorner$	q_{rej}	$\llcorner\!\lrcorner$	N
q_{finda}	b	q_{rej}	b	N
q_{finda}	a	q_{reset}	X	L

q	a	p	b	d
q_{findb}	$\#$	q_{rej}	$\#$	N
q_{findb}	$\llcorner\!\lrcorner$	q_{rej}	$\llcorner\!\lrcorner$	N
q_{findb}	a	q_{rej}	a	N
q_{findb}	b	q_{reset}	X	L
q_{reset}	$\llcorner\!\lrcorner$	q_0	$\llcorner\!\lrcorner$	R
q_{reset}	$\#$	q_{reset}	$\#$	L
q_{reset}	a	q_{reset}	a	L
q_{reset}	b	q_{reset}	b	L
q_{reset}	X	q_{reset}	X	L
q_{check}	$\llcorner\!\lrcorner$	q_{acc}	$\llcorner\!\lrcorner$	N
q_{check}	a	q_{rej}	a	N
q_{check}	b	q_{rej}	b	N
q_{check}	$\#$	q_{rej}	$\#$	N

Abgabe bis 13.06.2018 um 12:00 im Kasten neben Raum 343.