Übungen zur Vorlesung
Theoretische Informatik II
Blatt 6

Prof. Dr. Roland Meyer, M. Sc. Elisabeth Neumann Abgabe bis 27.06.2018 um 12:00

Aufgabe 6.1 (Abschlusseigenschaften von P)

a) Zeigen Sie, dass P abgeschlossen ist unter Vereinigung, Komplement und Konkatenation. Falls $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathsf{P}$, dann auch $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \in \mathsf{P}$, $\overline{\mathcal{L}_1} \in \mathsf{P}$ und $\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2 \in \mathsf{P}$.

b) Zeigen Sie, dass P abgeschlossen ist unter Kleene Stern. Falls $\mathcal{L}_1 \in \mathsf{P}$, dann auch $\mathcal{L}_1^* \in \mathsf{P}$.

Aufgabe 6.2 (Triple cycle cover)

Wir betrachten das folgende Graphproblem.

Triple cycle cover (TCC)
Gegeben: Gerichteter Graph G
Entscheide: Kann G durch drei disjunkte einfache Kreise überdeckt werden?

Hiermit ist gemeint, dass es in G einfache Pfade (ohne Knotenwiederholung)

$$v_1^{(1)} \to v_2^{(1)} \to \ldots \to v_k^{(1)} \to v_1^{(1)}$$
$$v_1^{(2)} \to v_2^{(2)} \to \ldots \to v_\ell^{(2)} \to v_1^{(2)}$$
$$v_1^{(3)} \to v_2^{(3)} \to \ldots \to v_s^{(3)} \to v_1^{(3)}$$

gibt, die Kreise sind (also beim selben Knoten starten und enden), so dass jeder Knoten $v \in V(G)$ als genau ein $v_i^{(j)}$ auftritt.
Beweisen Sie: TCC ist NP-vollständig (bezüglich Polynomialzeit-Reduktionen).

Aufgabe 6.3 (Entailment)
Wir betrachten das folgende Problem für aussagenlogische Formeln.

Implikationstest (ENTAILMENT)
Gegeben: Aussagenlogische Formeln F, F' in CNF
Entscheide: Impliziert die Formel F die Formel F'?

Beweisen Sie: ENTAILMENT ist coNP-vollständig (bezüglich Polynomialzeit-Reduktionen).

Beweisen Sie zunächst, dass VALIDITY coNP-hart ist, und reduzieren Sie dann VALIDITY in Polynomialzeit auf ENTAILMENT.

Allgemeingültigkeit (VALIDITY)	
Gegeben:	Aussagenlogische Formel F in CNF
Entscheide:	Ist F allgemeingültig, also eine Tautologie?

Hinweis: Mit Hilfe der Tseitin-Transformation lässt sich in Polynomialzeit zu einer beliebigen aussagenlogischen Formel eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in CNF berechnen.

Aufgabe 6.4 (Orakelmaschinen)

Orakelmaschinen sind eine Variante von Turing-Maschinen. Die Idee ist, dass eine Orakelmaschine eine Entscheidungsanfrage für ein vorgegebenes Problem mit Hilfe eines Orakels in nur einem Schritt beantworten kann.

Formal hat eine Orakelmaschine ein zusätzliches *Orakelband* und drei spezielle Zustände q_{query}, q_{yes}, q_{no}. Eine Orakelmaschine M mit Orakel für Problem $\mathcal{D}$ verhält sich wie folgt: Wenn sie in einer Berechnung den Zustand q_{query} betritt, wechselt sie danach in den Zustand q_{yes} oder q_{no}, abhängig davon ob der Inhalt des Orakelbands zu diesem Zeitpunkt eine Ja-Instanz von $\mathcal{D}$ ist oder nicht. Dabei wird der Inhalt des Orakelbands gelöscht. Bei der Messung des Zeitverbrauchs von M wird die Orakelanfrage als nur ein Schritt gezählt.

Beweisen Sie: Wenn sich ein Problem $\mathcal{L}$ von einer (deterministischen) Orakelmaschine mit einem Orakel für ein Problem $\mathcal{D} \in \mathsf{P}$ in Polynomialzeit entscheiden lässt, dann gilt $\mathcal{L} \in \mathsf{P}$.

Zeigen, wie sich das Problem STRONGLY-CONNECTED durch eine deterministische Orakelmaschine mit einem Orakel für PATH in logarithmischem Platz (wir zählen den Inhalt des Orakelbands nicht mit) entscheiden lässt.

Starker Zusammenhang in einem Graph	
Gegeben:	Gerichteter Graph $G = (V, R)$
Entscheide:	Gibt es für jedes Paar Knoten $s, t \in V$ einen Pfad $s \to^* t$ in G?

Abgabe bis 27.06.2018 um 12:00 im Kasten neben Raum 343.