WS 2017/2018 19.10.2017

Übungen zur Vorlesung
Theoretische Informatik I
Blatt 1

Prof. Dr. Roland Meyer, M. Sc. Elisabeth Neumann Präsenzaufgaben

Aufgabe 1.1 (Verbände)
Seien $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ und $M_2 \subseteq \mathbb{N}$ zwei endliche Mengen und $M = M_1 \times M_2$ die Menge aller Tupel (a, b) mit $a \in M_1$ und $b \in M_2$. Sei $\preceq$ eine Relation auf M, die wie folgt definiert ist

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \text{ gdw } a_1 \geq a_2 \text{ und } b_1 \geq b_2$$

wobei $\leq$ die "kleiner gleich" Relation auf den natürlichen Zahlen ist.

1. Zeigen Sie dass $\preceq$ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist (und damit dass $(M, \preceq)$ eine partielle Ordnung ist).
2. Zeigen Sie dass $\bigsqcup M'$ (und $\bigsqcap M'$) für jede Teilmenge $M' \subseteq M$ existieren (und damit dass $(M, \preceq)$ ein vollständiger Verband ist). Geben Sie $\top, \bot$ in dem Verband an.
3. Ist $(M, \preceq)$ immer noch ein vollständiger Verband wenn $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ eine unendliche Menge ist?

Aufgabe 1.2 (Beschränkte/endliche Höhe)

1. Zeigen Sie dass $(M, \preceq)$ aus Aufgabe 1.1 bechränkte Höhe hat.
2. Geben Sie einen unendlichen Verband (als Hasse-Diagramm) mit beschränkter Höhe an.
3. Geben Sie einen unendlichen Verband (als Hasse-Diagramm) mit endlicher, aber unbeschränkter Höhe an.

Aufgabe 1.3 (Kleene Iteration)
Sei $(M, \preceq)$ der vollständige Verband aus Aufgabe 1.1.

1. Zeigen Sie dass *(ACC)* und *(DCC)* gelten.
2. Seien nun $M_1 = M_2 = \{0, \ldots, 10\}$ und

$$f : M \to M$$
$$(a, b) \mapsto \left(\left\lceil \frac{a}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{b}{3} \right\rceil\right)$$

   Zeigen Sie dass f monoton, $\sqcup$-stetig und $\sqcap$-stetig ist.

3. Berechnen Sie *lfp*(f) und *gfp*(f) per Kleene Iteration.

Aufgabe 1.4 (Verbände)
Sei $(\mathcal{D}, \preceq)$ ein beliebiger vollständiger Verband. Zeigen Sie dass $(\mathcal{D}, \preceq)$ ein eindeutiges kleinstes Element $\perp$ hat, gegeben durch

$$\perp = \bigsqcap \mathcal{D} = \bigsqcup \emptyset.$$

Präsenzaufgaben - Keine schriftliche Abgabe