Übungen zur Vorlesung
Theoretische Informatik I
Blatt 3

Prof. Dr. Roland Meyer,
M. Sc. Elisabeth Neumann

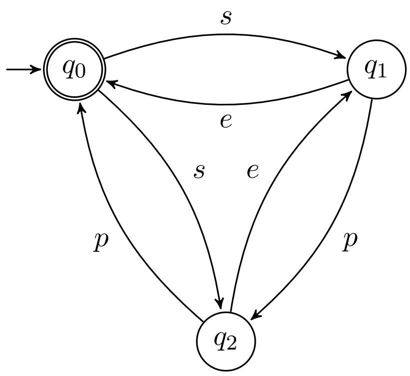
Abgabe bis 20.11.2017 um 12 Uhr

Aufgabe 3.1 (Reguläre Ausdrücke und Automaten)

a) Definieren Sie einen (nichtdeterministischen) endlichen Automaten über $\Sigma = \{a, b\}$, der die folgende Sprache akzeptiert, und argumentieren Sie, warum Ihre Konstruktion korrekt ist.

$$\big((a.b) \cup (b.a)\big)^*$$

b) Benutzen Sie Ardens Lemma um einen regulären Ausdruck für die Sprache des folgenden Automaten zu finden:



Hinweis: Vereinfachen Sie die Ausdrücke in den Zwischenschritten Ihrer Rechnung!

Aufgabe 3.2 (Alternatives Automatenmodell)
Ein *erweiterter NFA A* über dem Alphabet Σ ist ein NFA mit einer Menge von Startzuständen. Formal ist A ein Tupel $A = (Q, Q_0, \rightarrow, Q_F)$ mit Q einer endlichen Menge von Zuständen, $Q_0 \subseteq Q$ einer Menge von Startzuständen, $Q_F \subseteq Q$ einer Menge von Endzuständen und $\rightarrow \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ die Transitionsrelation.
Ein *Ablauf* von A auf $w = a_0 \dots a_{n-1} \in \Sigma^*$ ist eine Sequenz $q_0 \xrightarrow{a_0} q_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} q_n$, wobei $q_0 \in Q_0$. Wir schreiben auch $q_0 \xrightarrow{w} q_n$. Ein Ablauf ist *akzeptierend*, falls $q_n \in Q_F$. Die *Sprache* von A ist definiert als $L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid q_0 \xrightarrow{w} q_n \text{ für ein } q_0 \in Q_0 \text{ und } q_f \in Q_F\}$.

Beweisen Sie, dass es für jeden erweiteren NFA A einen NFA B gibt mit $L(A) = L(B)$.

Aufgabe 3.3 (Erweiterung von Ardens Lemma)
Seien $U, V \subseteq \Sigma^*$ zwei Sprachen mit $\varepsilon \in U$. Zeigen Sie, dass alle Lösungen $L \subseteq \Sigma^*$ der Gleichung $L = UL \cup V$ genau den Elementen der Menge $\mathcal{L} = \{U^*V' \mid V \subseteq V' \subseteq \Sigma^*\}$ entsprechen.
Gehen Sie wie folgt vor:

a) Zeigen Sie, dass jede Sprache $L \in \mathcal{L}$ die Gleichung $L = UL \cup V$ erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass jede Lösung L der Gleichung $L = UL \cup V$ in $\mathcal{L}$ liegt.

Hinweis zu Teil b): Sie müssen zeigen, dass jede Lösung L der Gleichung $L = UL \cup V$ die Form U^*V' mit $V \subseteq V' \subseteq \Sigma^*$ hat. Definieren Sie $V' = L \cup V$ und $U' = U \setminus \{\varepsilon\}$. Formen Sie die Gleichung $L = UL \cup V$ so um, dass Sie Ardens Lemma anwenden dürfen. Argumentieren Sie dann, warum $(U')^* = U^*$.

Aufgabe 3.4 (Schnitt von regulären Sprachen)
Es seien $A = (Q^A, q_0^A, \to_A, Q_F^A)$ und $B = (Q^B, q_0^B, \to_B, Q_F^B)$ zwei NFAs. Konstruieren Sie einen NFA $A \times B$ mit der Eigenschaft: $L(A \times B) = L(A) \cap L(B)$. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

Abgabe bis 20.11.2017 um 12 Uhr im Kasten neben Raum 343.