WS 2017/2018 27.11.2017

Übungen zur Vorlesung
Theoretische Informatik I
Blatt 4

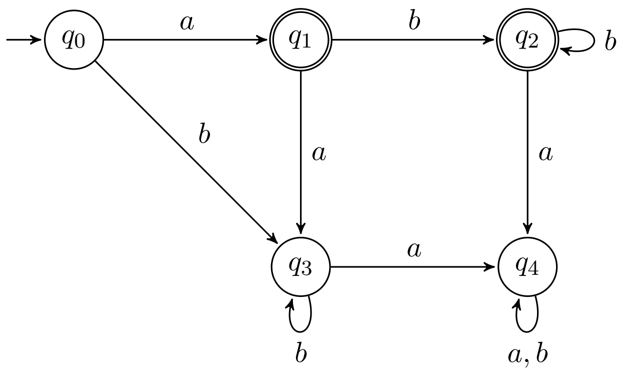
Prof. Dr. Roland Meyer,
M. Sc. Elisabeth Neumann Abgabe bis 4.12.2017 um 12 Uhr

Aufgabe 4.1 (Äquivalenzrelation)
Es sei $A = (Q, q_0, \rightarrow, Q_F)$ ein DFA. Die Relation $\equiv_A \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ ist definiert durch:

$$u \equiv_A v, \text{ falls es ein } q \in Q \text{ gibt, mit } q_0 \xrightarrow{u} q \text{ und } q_0 \xrightarrow{v} q.$$

Zeigen Sie, dass $\equiv_A$ eine Äquivalenzrelation auf Σ^* ist.

Aufgabe 4.2 (Minimalisierung)
Benutzen Sie den Algorithmus aus der Vorlesung, um den folgenden DFA zu minimalisieren. Geben Sie auch die Reihenfolge an, in der Sie die Tabelle ausfüllen.



Aufgabe 4.3 (Isomorphiesatz)
Es sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache mit $\text{Index}(\equiv_L) = k \in \mathbb{N}$. Zudem seien $A = (Q, q_0, \rightarrow, Q_F)$ ein DFA mit $L = L(A)$ und $|Q| = k$, und $A_L = (Q_L, q_{0L}, \rightarrow_L, Q_{FL})$ der minimale DFA für L aus dem Satz von Myhill-Nerode.
Es seien $u_1, \ldots, u_k$ Repräsentanten für die Äquivalenzklassen von $\equiv_L$. Im Folgenden sollen Sie zeigen, dass die Abbildung

$$\beta : Q_L \rightarrow Q$$
$$[u_i]_{\equiv_L} \rightarrow q \in Q \text{ mit } q_0 \xrightarrow{u_i} q$$

ein Isomorphismus zwischen A_L und A ist.

a) Es gilt $\equiv_A \subseteq \equiv_L$. Zeigen Sie, dass tatsächlich $\equiv_A = \equiv_L$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie folgenden Fakt. Wenn $\equiv_A \subseteq \equiv_L$ *und* $\text{Index}(\equiv_A) = \text{Index}(\equiv_L)$, *dann gilt auch* $\equiv_A = \equiv_L$.

b) Zeigen Sie, dass β wohldefiniert ist.
Hinweis: Die Abbildung β wurde auf Äquivalenzklassen definiert. Man muss zeigen, dass β unabhängig von der Wahl der Repräsentaten $u_1, \ldots, u_k$ ist. Dazu nimmt man an, dass $\hat{u}_i \equiv_L u_i$. Nun zeigt man, dass $\beta([\hat{u}_i]_{\equiv_L}) = \beta([u_i]_{\equiv_L})$.

c) Beweisen Sie, dass β eine Bijektion zwischen Q_L und Q ist.

d) Zeigen Sie, dass β einen Isomorphismus zwischen Automaten definiert.
Hinweis: Man muss noch zeigen, dass $\beta(q_{0L}) = q_0$, $\beta(Q_{FL}) = Q_F$ und für alle $p, p' \in Q_L$ und $a \in \Sigma$ gilt: $p \xrightarrow{a}_L p'$ genau dann, wenn $\beta(p) \xrightarrow{a} \beta(p')$.

Abgabe bis 4.12.2017 um 12 Uhr im Kasten neben Raum 343.