SS 2016 14.06.2016

Übungen zur Vorlesung
Formale Grundlagen der Programmierung
Blatt 9

Prof. Dr. Roland Meyer
Florian Furbach

Präsenzaufgaben

Aufgabe 9.1 (Kleene Iteration)
Gegeben ist die partielle Ordnung $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$. Bestimmen Sie mit Kleene Iteration den kleinsten Fixpunkt von

$$f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N});\ f(X) = \{(n \mod 4) + 6 \mid n \in \wedge\, n \leq |X|\}.$$

Aufgabe 9.2 (Verbände)

1. Sei $D = \{a, b, c, d\}$. Geben Sie eine partielle Ordnung $\leq$ an, die nicht total ist, so dass $(D, \leq)$ ein vollständiger Verband ist.
2. Geht das auch für $D = \{a, b, c\}$? Begründen Sie.
3. Sei $a \mid b$ definiert als a teilt b $(\exists c : a \cdot c = b)$. Ist
   - $(\mathbb{N}, |)$
   - $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, |)$
   - $((\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \setminus \{0\}, |)$

   ein vollständiger Verband?

Aufgabe 9.3 (Ketten)
Sei D ein vollständiger Verband und $f : D \to D$ monoton. Zeigen Sie, dass $(f^i(\bot))_{i\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Kette ist.

Aufgabe 9.4 (Join und Meet)
Beweisen Sie:

1. Ein vollständiger Verband $(D, \leq)$ hat ein eindeutiges kleinstes Element
$$\bot = \sqcup\emptyset = \sqcap D$$
2. Ein vollständiger Verband $(D, \leq)$ hat ein eindeutiges größtes Element
$$\bot = \sqcup D = \sqcap\emptyset$$
3. Jeder endliche Verband ist vollständig.

Präsenzaufgaben - Keine schriftliche Abgabe