Theorien erster Stufe:

Betrachte geschlossene Formeln aus $FO_{abg}(S)$.

Definition (Theorie):

Sei S eine Signatur.

Eine Theorie erster Stufe (über S) ist

eine Formelmenge $T \subseteq FO_{abg}(S)$,

die abgeschlossen gegenüber logischer Folgerung ist:

Für alle $A \in FO_{abg}(S)$ mit $T \models A$ gilt: $A \in T$. $\quad (\Delta)$

Beispiel / Bemerkung 5.13:

Sei S eine Signatur.

(1) $T_S := \{ A \in FO_{abg}(S) \mid A \text{ ist allgemeingültig} \}$ ist eine Theorie.

(2) Sei $\Sigma \subseteq FO_{abg}(S)$.

Dann ist

$$T_\Sigma := \{ A \in FO_{abg}(S) \mid \Sigma \models A \}$$

die von Σ erzeugte Theorie oder durch die Axiome Σ definierte Theorie.

(3) Sei M eine Struktur der Signatur S.

Dann ist

$$T_M := \{ A \in FO_{abg}(S) \mid M \models A \}$$

die Theorie von M.

Beweis:

Zu (1): Um zu zeigen, dass T_S eine Theorie ist, zeige (Δ).

Sei also $A \in FO_{abg}(S)$ gegeben mit $T_S \models A$.
Das heißt, für jede Struktur M gilt:

$$M \models T_S \text{ impliziert } M \models A.$$

Da aber

$$M \models T_S \quad \text{für alle } S\text{-Strukturen } M \text{ gilt,}$$

eben da T_S aus allgemeingültigen Formeln besteht,
folgt

$$M \models A \quad \text{für alle } S\text{-Strukturen } M.$$

Also ist A allgemeingültig und so $A \in T_S$. $\square$

<u>Lemma 5.14:</u>

(1) Ist T eine Theorie und $A \in FO_{abg}(S)$,
dann gilt

$$T \vdash_{\mathcal{F}} A \quad \text{gdw.} \quad A \in T.$$

(2) Theorie T heißt <u>inkonsistent</u>,
falls es $A \in FO_{abg}(S)$ gibt
mit

$$T \vdash_{\mathcal{F}} A \quad \text{und} \quad T \vdash_{\mathcal{F}} \neg A.$$

In dem Fall gilt $T = FO_{abg}(S)$.

(3) T_M <u>ist konsistent</u> für jede Struktur M.

(4) T_S ist in jeder Theorie über S enthalten.

<u>Beweis:</u>

<u>zu (1):</u> $A \in T$ gdw. $T \models A$ gdw. $T \vdash_{\mathcal{F}} A$.
(Satz von Gödel, 5.11)

<u>zu (2):</u> Die Formelmenge
T ist inkonsistent gdw. (Satz von Gödel, 5.11) T ist unerfüllbar.
Aus einer unerfüllbaren Formelmenge folgt alles. $\square$

Definition:

Sei T eine Theorie erster Stufe über der Signatur S.

- T heißt <u>vollständig</u>, falls für jede Formel $A \in FO_{abg}(S)$ gilt:

  $A \in T$ oder $\neg A \in T$.

- T heißt (<u>endlich</u>, <u>aufzählbar</u>) <u>axiomatisierbar</u>, falls

  es eine (<u>endliche</u>, <u>aufzählbare</u>) Teilmenge $\Sigma \subseteq FO_{abg}(S)$ gibt

  mit $T = T_\Sigma$.

- T heißt <u>entscheidbar</u>, falls für alle $A \in FO_{abg}(S)$

  die Frage $A \in T$ entscheidbar ist.

<u>Bemerkung 5.16</u>:

(1) T_M ist vollständig für jede Struktur M.
Mit Lemma 5.14 ist T_M außerdem konsistent.

(2) T ist erfüllbar gdw. T ist konsistent.

(3) Ist T aufzählbar axiomatisierbar,
dann ist T aufzählbar.

(4) Ist T <u>vollständig</u> und <u>aufzählbar axiomatisierbar</u>,
dann ist T <u>entscheidbar</u>.

(5) Ist T vollständig und konsistent,
dann $T = T_M$ für eine Struktur M.

<u>Beweis</u>:

<u>zu (1)</u>: Sei $A \in FO_{abg}(S)$ gegeben.
Falls $M \models A$, dann $A \in T_M$.
Ansonsten $M \not\models A$, also $M \models \neg A$ und so $\neg A \in T_M$.

Zu (3): Ist T aufzählbar axiomatisierbar,
gilt $T = T_\Sigma$ für ein aufzählbares Σ.

Ferner

$$T_\Sigma = \{ A \in FO_{Abg}(S) \mid \Sigma \models A \}$$

$$\overset{\text{(Satz von Gödel, 5.11)}}{=} \{ A \in FO_{Abg}(S) \mid \Sigma \vdash_{\mathfrak{F}} A \}$$

Da Σ aufzählbar ist,
sind die Folgerungen aus Σ mittels System $\mathfrak{F}$
aufzählbar (vergleiche Bemerkung 2.5.

Zu (4): Sei $A \in FO_{Abg}(S)$ gegeben.
Um zu entscheiden, ob A in T liegt,
beachte dass T vollständig ist,
also A oder $\neg A$ in T liegen.
Ferner ist T mit Punkt (3) aufzählbar.
Diese Aufzählung findet nun A oder $\neg A$,
und in dem Fall wird entsprechend
"$A \in T$" oder "$A \notin T$" geantwortet.

Beachte, dass hier Konsistenz von T angenommen wird.
Ist T inkonsistent, lautet die Antwort immer "$A \in T$".

Zu (5): Da T konsistent ist, ist T erfüllbar.
Es gibt also M mit $M \models T$.

Damit gilt $T \subseteq T_M$.
Angenommen die Umkehrung wäre falsch,
d.h. es gäbe $A \in T_M$ mit $A \notin T$.
Dann wäre aber wegen der Vollständigkeit von T
$\neg A \in T$.
Damit $A, \neg A \in T_M$ $\lightning$ T_M ist konsistent.

 $\square$