Mit den Lemmata der letzten Woche
lässt sich ein weiteres Beweisprinzip zeigen,
das das Finden von Beweisen erleichtert.

Satz (Beweis mittels Inkonsistenz):

$\Sigma \vdash A$ gdw. $\Sigma \cup \{\neg A\}$ inkonsistent.

Beweis:

$\Rightarrow$ Falls $\Sigma \vdash A$,
dann gilt

$$\Sigma, \neg A \vdash A$$
$$\Sigma, \neg A \vdash \neg A.$$

$\Leftarrow$ Falls $\Sigma \cup \{\neg A\}$ inkonsistent ist,
dann gibt es $B \in F_0$ mit

$$\Sigma, \neg A \vdash B$$

und $\Sigma, \neg A \vdash \neg B$.

Mit dem Deduktionstheorem folgt

$$\Sigma \vdash \neg A \to B \qquad (1)$$

und $\Sigma \vdash \neg A \to \neg B$ (2)

Mit (1) und (2) ist nun zu zeigen,
dass $\Sigma \vdash A$.

Ein Beweis ist

$(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ (Ax 3)

$\neg A \to \neg B$ (Aus (2))

$B \to A$ (MP)

$(\neg A \to B) \to (\neg B \to \neg\neg A)$ (Lemma 4)

$\neg A \to B$ (Aus (1))

$\neg B \to \neg\neg A$ (MP)

$(\neg B \to \neg\neg A) \to ((\neg\neg A \to A) \to (\neg B \to A))$ (Lemma 1)

$(\neg\neg A \to A) \to (\neg B \to A)$ (MP)

$\neg\neg A \to A$ (Beispiel 2.10)

$\neg B \to A$ (MP)

$(B \to A) \to ((\neg B \to A) \to A)$ (Lemma 7)

$(\neg B \to A) \to A$ (MP)

A (MP)

$\square$

Der Beweis der Vollständigkeit von F_0 benötigt folgendes

<u>Lemma:</u>

Betrachte $A(p_1, \dots, p_n) \in F_0$ (die Notation $A(p_1, \dots, p_n)$ gibt die Aussagevariablen in A an) mit $n > 0$.

Sei ℓ eine Bewertung.

Mit

$$P_i := \begin{cases} p_i, & \text{falls } \ell(p_i) = 1 \\ \neg p_i, & \text{falls } \ell(p_i) = 0 \end{cases} \qquad A' := \begin{cases} A, & \text{falls } \ell(A) = 1 \\ \neg A, & \text{falls } \ell(A) = 0 \end{cases}$$

gilt:

$$P_1, \dots, P_n \vdash A'.$$

<u>Beweis:</u>

Mittels Induktion nach dem Aufbau von A.

<u>IA:</u> Sei $A \equiv p_1$.

Dann $\ell(A) = \ell(p_1)$ und so $A' \equiv P_1$.

Es folgt $P_1 \vdash A'$.

<u>IS:</u> Angenommen die Ableitung gelte für B und C.

Dann gilt für

$\underline{A \equiv \neg B}$:

↳ Falls $\ell(A) = 1$, dann $A' \equiv A$.

Außerdem $\ell(B) = 0$ und so $B' \equiv \neg B$.

Nach IV gilt

$$P_1, \dots, P_n \vdash B' \quad \text{mit } B' \equiv \neg B \equiv A'.$$

↳ Falls $\ell(A) = 0$, dann $A' \equiv \neg A \equiv \neg\neg B$.

Da $\ell(A) = 0$, folgt $\ell(B) = 1$ und so $B' \equiv B$.

Per IV für B gilt

$$P_1, \dots, P_n \vdash B'$$

Ferner

$$\vdash B \to \neg\neg B \quad \text{mit Lemma 3.}$$

Also mit (MP):

$$P_1, \dots, P_n \vdash \neg\neg B \quad \text{mit } \neg\neg B \equiv A'.$$

$\underline{A \equiv B \to C}$:

↳ Falls $\ell(A) = 0$, dann $\ell(B) = 1$ und $\ell(C) = 0$.

Dann gilt

$$A' \equiv \neg A, \quad B' \equiv B, \quad C' \equiv \neg C.$$

Nach IV für B und C folgt

$$P_1, \dots, P_n \vdash B'$$

und $P_1, \dots, P_n \vdash C'$.

Ferner $\vdash B \to (\neg C \to \neg(B \to C))$ (Lemma 5).

Nun folgt mit zweimaliger Anwendung von (MP):

$$P_1, \dots, P_n \vdash \underbrace{\neg(B \to C)}_{\equiv A'}$$

↳ Falls $\ell(A)=1$, dann $\ell(B)=0$ oder $\ell(C)=1$.

Außerdem

$$A' \equiv A \equiv B \to C.$$

Nach IV für B und C gilt

$$P_1, \dots, P_n \vdash B' \equiv \neg B \quad \text{oder}$$

$$P_1, \dots, P_n \vdash C' \equiv C.$$

Zeige $P_1, \dots, P_n, B \vdash C$. (hier wurde schon das Deduktionstheorem genutzt).

Falls $P_1, \dots, P_n \vdash C$, dann folgt.

Falls $P_1, \dots, P_n \vdash \neg B$,

dann

$$\begin{aligned}
&\neg B \to (B \to C) && \text{(Lemma 2)}\\
&\neg B && \text{(IV)}\\
&B \to C && \text{(MP)}\\
&B && \text{(Hypothese)}\\
&C && \text{(MP).}
\end{aligned}$$

$\square$

<u>Satz (Vollständigkeit von $\mathcal{S}_0$):</u>

Aus $\models A$ folgt $\vdash A$.

<u>Beweis:</u>

Angenommen $\models A$, das heißt $\ell(A)=1$ für <u>alle</u> Bewertungen.

Betrachte eine Bewertung ℓ mit

$$\ell(p_n) = 1 \qquad (\text{und } \ell(A)=1).$$

Es gilt mit obigem Lemma

$$P_1, \dots, P_n \vdash A',$$

wobei $P_n \equiv p_n$ und $A' \equiv A$.

Betrachte eine andere Bewertung ℓ' mit

$$\ell'(p_n) = 0 \qquad (\text{und } \ell'(A) = 1).$$

Dann gilt wiederum mit dem Lemma

$$P_1, \dots, P_{n-1}, \neg p_n \vdash A.$$

Mit dem Deduktionstheorem erhält man

$$P_1, \dots, P_{n-1} \vdash p_n \to A \quad \text{und}$$

$$P_1, \dots, P_{n-1} \vdash \neg p_n \to A.$$

Lemma 7 liefert

$$\vdash (p_n \to A) \to ((\neg p_n \to A) \to A)$$

Mit zweimaliger Anwendung von (MP) folgt:

$$P_1, \dots, P_{n-1} \vdash A.$$

Das Argument wiederholt man für alle $1 \leq i \leq n-1$ und erhält

$$\vdash A.$$

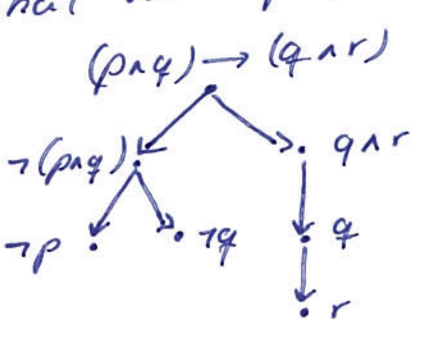
$\square$

<u>Beispiel (Beweis im Sequenzenkalkül)</u>:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{p, \neg p \vdash q, r}\,(Ax2) \qquad \cfrac{}{p, r \vdash q, r}\,(Ax1)}{p, \neg p \vee r \vdash q, r}\,(R\vee) \qquad \cfrac{}{q, \neg p \vee r \vdash q, r}\,(Ax1)}{\cfrac{p \vee q, \neg p \vee r \vdash q, r}{p \vee q, \neg p \vee r \vdash q \vee r}\,(R\vee)}\,(R\vee)$$

<u>Beispiel (Tableaus)</u>:

(1) Zeige Erfüllbarkeit von $(p \wedge q) \to (q \wedge r)$



Alle erfüllenden Belegungen: ℓ mit $\ell(p) = 0$ oder $\ell(q) = 0$ oder ($\ell(q) = 1$ und $\ell(r) = 1$)

(2) Zeige, dass $p \wedge ((q \vee \neg p) \wedge \neg q)$ nicht erfüllbar ist: