Sebastian Muskalla
Prof. Dr. Roland Meyer

Theoretische Informatik 1
Übungsblatt 2

TU Braunschweig
Wintersemester 2018/19

Ausgabe: 31.10.2018 Abgabe: 08.11.2018, 14:00

Geben Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, 08.11.2018, 14:00 Uhr, durch Einwerfen in die Übungskästen neben Büro IZ 343 ab. Geben Sie in Gruppen von **4 Personen** ab.

Aufgabe 1: Verbände

a) Es seien $(D_1, \preceq_1)$ und $(D_2, \preceq_2)$ vollständige Verbände. Der **Produktverband** ist als $(D_1 \times D_2, \preceq)$ definiert. Hierbei ist $\preceq$ die **Produktordnung** auf Tupeln mit $(d_1, d_2) \preceq (d_1', d_2')$ gdw. $d_1 \preceq_1 d_1'$ und $d_2 \preceq_2 d_2'$.

   Zeigen Sie, dass er seinem Namen entsprechend tatsächlich ein vollständiger Verband ist.

b) Beweisen Sie: Der Produktverband $(D_1 \times D_2, \preceq)$ erfüllt genau dann die ACC, wenn sowohl $(D_1, \preceq_1)$ als auch $(D_2, \preceq_2)$ die ACC erfüllen.

c) Geben Sie Hasse-Diagramme für einen Verband an, der

   - unendlich ist, aber beschränkter Höhe hat.
   - endliche Höhe, aber keine beschränkte Höhe hat.

Aufgabe 2: Reaching Definitions-Analyse

Führen Sie für das folgende Programm eine Reaching-Definitions-Analyse durch.

$[x := 2]^1$
while $[x < 5]^2$ **do**
  if $[y = 7]^3$ **then**
    $[y := y + 2]^4$
  else
    $[x := x - 2]^5$
  end if
end while
$[skip]^6$

a) Zeichnen Sie den Kontrollflussgraphen G.

b) Betrachten Sie den Verband $\mathcal{D} = (\mathcal{P}(\{x, y\} \times (\{1, \ldots, 6\} \cup \{?\})), \subseteq)$. Geben Sie für die Blöcke 1 – 6 geeignete monotone Transferfunktionen über diesem Verband an.

c) Betrachten Sie das Datenflusssystem $(G, (D, \leqslant), \{(x, ?), (y, ?)\}, \mathrm{TF})$, wobei TF die Transferfunktionen aus Teil b) sind. Geben Sie das induzierte Gleichungssystem an und bestimmen Sie seine kleinste Lösung mit dem Satz von Kleene.

Aufgabe 3: Datenflussanalysen

Betrachten Sie das folgende Program.

$[x := 3]^1$
$[x := x + 7]^2$
while $[x < 20]^3$ **do**
    $[x := x + 2]^4$
end while
$[skip]^5$

a) Zeichnen Sie den Kontrollflussgraphen G.

b) Betrachten Sie den Verband $\mathcal{D} = (\mathbb{N} \cup \{\bot, \top\}, \preceq)$ mit $\bot \preceq n \preceq \top \; \forall n \in \mathbb{N}$ aus Aufgabe 4a) des ersten Übungsblatts.

Wir interpretieren die Verbandselemente wie folgt als Datenflusswerte:

$\bot$: Variable x is am Eingang des Blocks nicht initialisiert.

$n \in \mathbb{N}$: Variable x ist am Eingang des Blocks konstant Wert n (ist also garantiert n).

$\top$: Variable x is am Eingang des Blocks nicht konstant.

Führen Sie nun mit diesem Verband eine Vorwärts-Datenflussanalyse durch:

- Stellen Sie das Datenflusssystem $(G, \mathcal{D}, \bot, \mathrm{TF})$ auf. Geben Sie hierzu zu jedem der Blöcke 1 – 5 eine montone Transferfunktion an.
- Stellen Sie das induzierte Gleichungssystem auf.
- Bestimmten Sie seine kleinste Lösung.

c) Betrachten Sie den Verband $\mathcal{D}' = (\mathcal{P}(e, o), \subseteq)$.

Wir interpretieren die Verbandselemente wie folgt als Datenflusswerte:

$\emptyset$: Variable x is am Eingang des Blocks nicht initialisiert.

$\{e\}$: Variable x ist am Eingang des Blocks garantiert gerade (*even*).

$\{o\}$: Variable x ist am Eingang des Blocks garantiert ungerade (*odd*).

$\{e, o\}$: Es ist nicht klar, ob Variable x gerade oder ungerade ist.

Führen Sie nun mit diesem Verband eine Vorwärts-Datenflussanalyse durch:

- Stellen Sie das Datenflusssystem $(G, \mathcal{D}', \emptyset, \mathrm{TF})$ auf. Geben Sie hierzu zu jedem der Blöcke 1 – 5 eine montone Transferfunktion an.
- Stellen Sie das induzierte Gleichungssystem auf.
- Bestimmten Sie seine kleinste Lösung.

Anmerkung: Es handelt sich bei diesen Analysen (anders als bei den Analysen auf den Folien) nicht um kill-gen-Frameworks.

Aufgabe 4: Reguläre Sprachen und Ausdrücke
Wir fixieren das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen über Σ regulär sind, in dem Sie jeweils einen regulären Ausdruck für sie angeben. Beschreiben Sie zudem die Sprache jeweils mit einem Satz.

Für einen Buchstaben $x \in \Sigma$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$ bezeichnet $|w|_x$ hier die Anzahl der Vorkommen von x in w.

Beispiel:
Gegeben: $\mathcal{L}_{bsp} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \geqslant 1\}$.
Regulärer Ausdruck: $\mathcal{L}_{bsp} = \Sigma^*.a.\Sigma^*$
Beschreibung: Sprache der Wörter, in denen Buchstabe a mindestens einmal vorkommt.

a) $\mathcal{L}_a = \Sigma^*.a.\Sigma^* \setminus \Sigma^*.a.\Sigma^*.a.\Sigma^*$

b) $\mathcal{L}_b = \overline{\Sigma^*.b.\Sigma^*}$

c) $\mathcal{L}_c = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ ist gerade}\}$.

d) $\mathcal{L}_d = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b \text{ ist gerade}\}$

e) $\mathcal{L}_e = \{w \in \Sigma^* \mid \forall i\colon w(i) = c \implies w(i+1) = b\}$

f) Es sei $\mathcal{L} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ ist gleich } |w|_b\}$. Diese Sprache ist nicht regulär. Geben Sie eine unendliche reguläre Sprache $\mathcal{L}_f \subseteq \mathcal{L}$ an.