Sebastian Muskalla
Prof. Dr. Roland Meyer

Theoretische Informatik 1
Übungsblatt 3

TU Braunschweig
Wintersemester 2018/19

Ausgabe: 14.11.2018 Abgabe: 22.11.2018, 14:00

Geben Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, 22.11.2018, 14:00 Uhr, durch Einwerfen in die Übungskästen neben Büro IZ 343 ab. Geben Sie in Gruppen von 4 Personen ab.

Die Verweise (wie z.B. Satz 3.18) beziehen sich auf die aktuelle Version der Vorlesungsnotizen vom 14. November.

Aufgabe 1: Satz 3.18

Es sei $A = (Q_A, q_0, \to, Q_F)$ ein NFA, und $A^{\text{det}} = (Q^{\text{det}}, q_0^{\text{det}}, \to^{\text{det}}, Q_F^{\text{det}})$ der durch die Rabin-Scott-Potenzmengenkonstruktion entstehende Automat mit $Q^{\text{det}} = \mathcal{P}(Q_A) = \{Q \mid Q \subseteq Q_A\}$, $q_0^{\text{det}} = \{q_0\}$ und $Q_F^{\text{det}} = \{Q \subseteq Q_A \mid Q \cap Q_F \neq \varnothing\}$. Es gilt $Q \xrightarrow{a}^{\text{det}} Q'$ gdw. $Q' = \left\{q' \in Q_A \;\middle|\; \exists q \in Q \colon q \xrightarrow{a} q'\right\}$. Beachten Sie, dass A^{det} deterministisch ist, da es für jedes Paar aus Zustand Q und Symbol a einen eindeutigen Nachfolgezustand Q' gibt.

Ziel dieser Aufgabe ist es, Satz 3.18 zu beweisen. Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

a) Zeigen Sie durch Induktion nach i: Zu jedem Lauf $q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_i} q_i$ von A gilt für den (eindeutigen) Lauf $Q_0 = q_0^{\text{det}} \xrightarrow{a_1} Q_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_i} Q_i$ von A^{det}, der das selbe Wort liest, $q_i \in Q_i$.

b) Zeigen Sie durch Induktion nach i: Zu jedem Lauf $Q_0 = q_0^{\text{det}} \xrightarrow{a_1} Q_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_i} Q_i$ von A^{det} und jedem Zustand $q_i^{\text{det}} \in Q_i$ gibt es einen Lauf $q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_i} q_i = q_i^{\text{det}}$ von A, der das selbe Wort liest und in q_i^{det} endet.

c) Beweisen Sie unter Verwendung von a) und b), dass $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A^{\text{det}})$ gilt.

Aufgabe 2: Satz 3.7

Es seien $A = (Q_A, q_{0A}, \to_A, Q_{FA})$ und $B = (Q_B, q_{0B}, \to_B, Q_{FB})$ NFAs mit $Q_A \cap Q_B = \varnothing$.

a) Es sei $A.B = (Q, q_0, \to, Q_F)$ der aus der Vorlesung bekannte Automat mit $Q = Q_A \uplus Q_B$, $q_0 = q_{0A}$,

$$\to = \to_A \cup \to_B \cup \left\{ q_A \xrightarrow{a} q_B \;\middle|\; q_A \in Q_{FA}, q_{0B} \xrightarrow{a}_B q_B \right\},$$

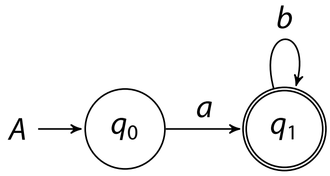
$$Q_F = Q_{FB} \cup \begin{cases} \varnothing, & q_{0B} \notin Q_{FB} \text{ (d.h. } \varepsilon \notin \mathcal{L}(B)\text{)}, \\ Q_{FA}, & q_{0B} \in Q_{FB} \text{ (d.h. } \varepsilon \in \mathcal{L}(B)\text{)}. \end{cases}$$

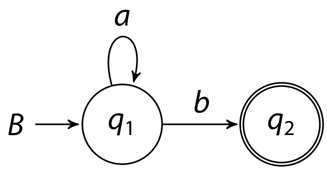
Beweisen Sie, dass $\mathcal{L}(A.B) = \mathcal{L}(A).\mathcal{L}(B)$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass es Automaten $A \cup B$, A^* mit $\mathcal{L}(A \cup B) = \mathcal{L}(A) \cup \mathcal{L}(B)$, $\mathcal{L}(A^*) = \mathcal{L}(A)^*$ gibt.

Geben Sie (wie in der Vorlesung) sowohl eine schematische Zeichnung der Konstruktion dieser Automaten als auch eine formale Definition der Automaten als Tupel an. Sie müssen nicht beweisen, dass $\mathcal{L}(A \cup B) = \mathcal{L}(A) \cup \mathcal{L}(B)$, und $\mathcal{L}(A^*) = \mathcal{L}(A)^*$ gelten.

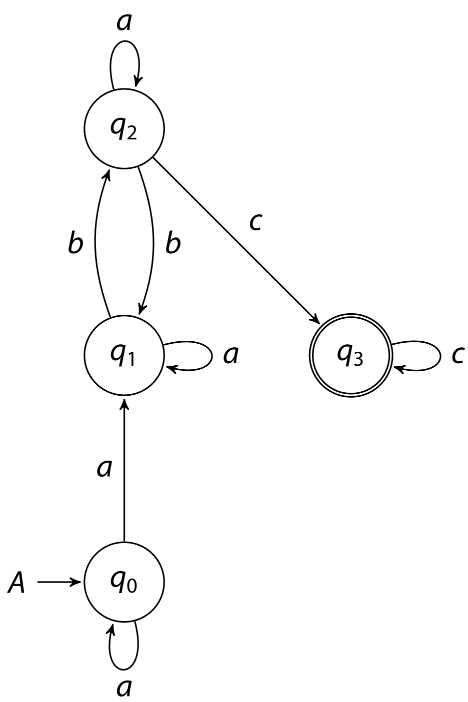
c) Betrachten Sie die folgenden Automaten A, B über $\{a, b\}$. Geben Sie $A \cup B$, $A \times B$, $A.B$ und A^* an.





Aufgabe 3: NFA zu REG mit Ardens Lemma

Gegeben sei der folgende NFA A über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$:



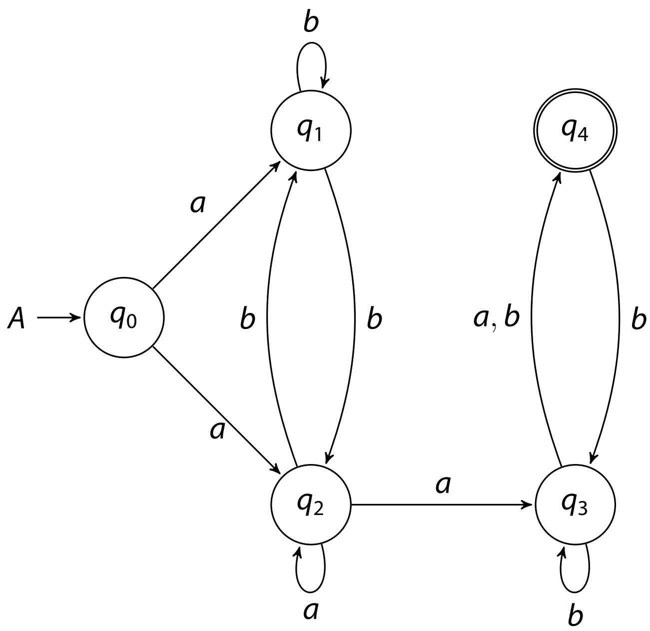
a) Geben Sie das zu A gehörige Gleichungssystem an.

b) Bestimmen Sie einen regulären Ausdruck für $\mathcal{L}(A) = X_0$, indem Sie das Gleichungssystem unter Verwendung von Ardens Lemma lösen.

c) Konstruieren Sie aus dem regulären Ausdruck einen NFA B mit $\mathcal{L}(B) = X_0$. Vergleichen Sie die Größe (Zustandsanzahl) von A und B.

Aufgabe 4: Potenzmengenkonstruktion und Komplementierung

Gegeben sei der folgende NFA A über $\Sigma = \{a, b\}$.



a) Determinisieren Sie A, bestimmen Sie also einen DFA A^{det} mit $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}\left(A^{\text{det}}\right)$ unter Verwendung der Rabin-Scott-Potenzmengenkonstruktion.

   Hinweis: Sie können sich auf die Zustände beschränken, die vom Startzustand $\{q_0\}$ aus erreichbar sind. Konstruieren Sie hierzu zu bereits vorhanden Zuständen ihre Nachfolger bis Sie keinen neuen Zustände mehr erhalten, beginnend beim Startzustand $\{q_0\}$.

b) Vergleichen Sie die Größe der Zustandsmenge von A^{det} mit dem Worst-Case-Wert $2^{|\{q_0,\ldots,q_4\}|}$.

c) Konstruieren Sie den Automaten $\overline{A^{\text{det}}}$ mit $\mathcal{L}(\overline{A^{\text{det}}}) = \overline{\mathcal{L}(A)}$.

d) Geben Sie exemplarisch für das Wort $w = abbabb$ alle möglichen Läufe von A auf w und den eindeutigen Lauf von $\overline{A^{\text{det}}}$ auf w an. Gilt $w \in \mathcal{L}(A)$?