Theoretische Informatik 1
Übungsblatt 5

Ausgabe: 12.12.2018 — Abgabe: 20.12.2018, 14:00

Geben Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, 20.12.2018, 14:00 Uhr, durch Einwerfen in die Übungskästen neben Büro IZ 343 ab. Geben Sie in Gruppen von 4 Personen ab.

Aufgabe 1: Äquivalenzklassen

a) Betrachten Sie

$$\mathcal{L} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} .$$

Beweisen Sie, dass

$$[a^n]_{\equiv_\mathcal{L}} = \{a^n\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$
$$[a^{n+1}.b]_{\equiv_\mathcal{L}} = \{a^{\ell+1}.b^{\ell+1-n} \mid \ell \in \mathbb{N}, \ell \geq n\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt.

Geben Sie alle weiteren Äquivalenzklassen bezüglich $\equiv_\mathcal{L}$ an. Bestimmen Sie insbesondere für alle $n, m \in \mathbb{N}$, in welcher Äquivalenzklasse $a^n b^m$ liegt. (Sie müssen Ihre Angaben für die weiteren Äquivalenzklassen nicht formal beweisen.)

b) Betrachten Sie die Sprache

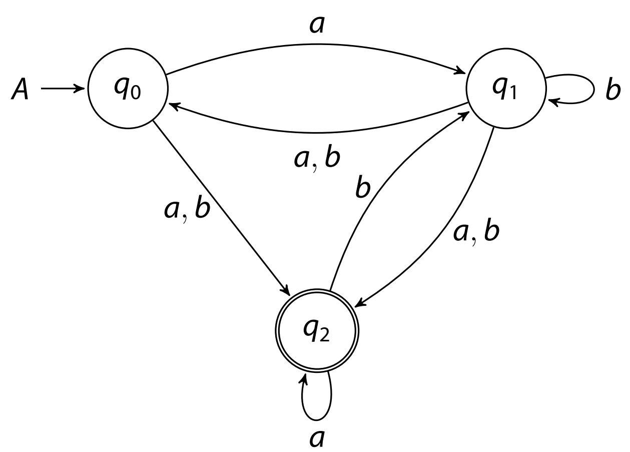
$$\mathcal{L} = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält } aa \text{ oder } bb\}.$$

Bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen von $\equiv_\mathcal{L}$.
Geben Sie den Äquvialenzklassenautomaten $A_\mathcal{L}$ an.

Hinweis: Mit „enthält *aa*" ist hier gemeint, dass w von der Form $w = w_1.a.a.w_2$ ist.

Aufgabe 2: Minimierung

Betrachten Sie den folgenden NFA A über $\{a, b\}$.



a) Konstruieren Sie einen zu A sprachäquivalenten DFA B unter Verwendung der Rabin-Scott-Potenzmengenkonstruktion.

   Stellen Sie sicher, dass B keine unerreichbaren Zustände enthält.

b) Bestimmen Sie auf den Zuständen von B die ~-Äquivalenzklassen unter Verwenden des Table-Fillings-Algorithmus aus der Vorlesung.

   Geben Sie an, in welcher Reihenfolge Sie die Zellen in der Tabelle markiert haben.

c) Geben Sie den minimalen DFA C für $\mathcal{L}(A)$ an. Verwenden Sie hierzu die ~-Äquivalenzklassen.

d) Vergleichen Sie die Zustandsanzahl von A, B und C.

Aufgabe 3: Der Isomorphiesatz für DFAs
Es sei $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache mit $\text{Index}(\equiv_{\mathcal{L}}) = k \in \mathbb{N}$. Es sei $A = (Q, q_0, \rightarrow, Q_F)$ ein DFA mit $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A)$ und $|Q| = k$. Es sei $A_{\mathcal{L}} = (Q_{\mathcal{L}}, q_{0\mathcal{L}}, \rightarrow_{\mathcal{L}}, Q_{F\mathcal{L}})$ der Äquivalenzklassenautomat zu $\mathcal{L}$, also der minimale DFA mit $\mathcal{L}(A_{\mathcal{L}}) = \mathcal{L}$. Es seien $u_1, \ldots, u_k$ Repräsentanten für die Äquivalenzklassen von $\equiv_{\mathcal{L}}$.

Im Folgenden sollen Sie Satz 6.11 aus der Vorlesung zeigen: A und $A_{\mathcal{L}}$ sind isomorph.

Der Isomorphismus β kann wie folgt gewählt werden:

$$\begin{aligned} \beta : Q_{\mathcal{L}} &\rightarrow Q \\ [u_i]_{\equiv_{\mathcal{L}}} &\mapsto q \in Q \text{ mit } q_0 \xrightarrow{u_i} q \text{ in } A. \end{aligned}$$

a) Betrachte Sie die Äquivalenzrelation $\equiv_A$. Zeigen Sie, dass $\equiv_A = \equiv_L$ gilt.

   Hinweis: Im Beweis des Satzes von Myhill & Nerode haben wir gesehen, dass $\equiv_A \subseteq \equiv_L$ gilt. Verwenden Sie folgenden Fakt. Wenn $\equiv_A \subseteq \equiv_L$ und $\text{Index}(\equiv_A) = \text{Index}(\equiv_L)$, dann gilt auch $\equiv_A = \equiv_L$.

b) Zeigen Sie, dass β wohldefiniert ist.

   Hinweis: Die Abbildung β wurde auf Äquivalenzklassen definiert. Man muss zeigen, dass β unabhängig von der Wahl der Repräsentanten $u_1, \ldots, u_k$ ist. Dazu nimmt man an, dass $\hat{u}_i \equiv_L u_i$. Nun zeigt man, dass $\beta([\hat{u}_i]_{\equiv_L}) = \beta([u_i]_{\equiv_L})$.

c) Beweisen Sie, dass β eine Bijektion zwischen $Q_{\mathcal{L}}$ und Q ist.

d) Zeigen Sie, dass β ein Isomorphismus ist.

   Hinweis: Man muss noch zeigen, dass $\beta(q_{0\mathcal{L}}) = q_0$, $\beta(Q_{F\mathcal{L}}) = Q_F$ und für alle $p, p' \in Q_{\mathcal{L}}$ und $a \in \Sigma$ gilt: $p \xrightarrow{a}_{\mathcal{L}} p'$ genau dann, wenn $\beta(p) \xrightarrow{a} \beta(p')$.

Aufgabe 4: Pumping-Lemma

a) Betrachte $\Sigma = \{a, b\}$. Zu einem Wort w sei $|w|_a$ die Anzahl der Vorkommen von Buchstabe a in w, $|w|_b$ analog.

Beweisen Sie unter Verwendung des Pumping-Lemmas, dass die Sprache

$$\mathcal{L} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b + 5 < |w|_a\}$$

nicht regulär ist.

b) Beweisen Sie unter Verwendung des Pumping-Lemmas, dass die Sprache

$$\mathcal{L} = \{a^{(n^2)} \in a^* \mid n \in \mathbb{N}\}$$

nicht regulär ist.

Hinweis: Sei $p \in \mathbb{N}$. Überlegen Sie sich, wie viele Quadratzahlen es zwischen den Zahlen p^2 und $p^2 + p$ geben kann.