René Maseli
Prof. Dr. Roland Meyer

Theoretische Informatik 1
Übungsblatt 1

TU Braunschweig
Wintersemester 2021/22

Ausgabe: 09.11.2021 Abgabe: 18.11.2021, 23:59

Geben Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, 18.11 23:59 Uhr, per E-Mail an ihren Tutor ab. Fertigen Sie dazu ihre Hausaufgaben direkt in .pdf Form an oder scannen ihre handschriftlichen Hausaufgaben ein. Geben Sie in Gruppen von **4 Personen** ab.

Aufgabe 1: [12 Punkte]
Betrachten Sie den vollständigen Verband $(\mathbb{N}, \preceq)$. Hierbei ist $\preceq$ eine partielle Ordnung, die wie folgt definiert ist: Für $x, y \in D$ gilt $x \preceq y$ falls $x = 0$, oder $y = 1$ oder $x = y = n$ für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

- [1 Punkt] Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von $(\mathbb{N}, \preceq)$.

  Beschränken Sie sich auf Zahlen $\leqslant 9$.
- [1 Punkt] Geben Sie $\top$ und $\bot$ für diesen Verband an.
- [6 Punkte] Geben Sie die Werte der folgenden Joins und Meets an:
  - $\bot \sqcup \top$
  - $\bot \sqcap \top$
  - $\top \sqcup 5$
  - $6 \sqcap 7$
  - $\bot \sqcup 4$
  - $\bigsqcup\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\}$
- [2 Punkte] Ist die Höhe dieses Verbandes endlich? Ist die Höhe beschränkt?
- [2 Punkte] Geben Sie ein Hasse-Diagramm für einen Verband mit endlicher, aber unbeschränkter Höhe, an.

Aufgabe 2: [9 Punkte]
Seien $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ und $M_2 \subseteq \mathbb{N}$ zwei endliche Mengen und $M = M_1 \times M_2$ die Menge aller Tupel (a, b) mit $a \in M_1$ und $b \in M_2$. Sei $\preceq$ eine Relation auf M, die wie folgt definiert ist

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \quad \text{gdw.} \quad a_1 \geqslant a_2 \text{ und } b_1 \geqslant b_2$$

wobei $\leqslant$ die gewöhnliche "kleiner gleich" Relation auf den natürlichen Zahlen ist.

- [3 Punkte] Zeigen Sie dass $\preceq$ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

  Damit ist gezeigt dass $(M, \preceq)$ eine partielle Ordnung ist.

- [4 Punkte] Zeigen Sie dass der Join $\bigsqcup M'$ und der Meet $\bigsqcap M'$ für jede Teilmenge $M' \subseteq M$ existieren.

  Damit ist gezeigt, dass $(M, \preceq)$ ein vollständiger Verband ist.

- [1 Punkt] Geben Sie $\top, \bot$ für diesen Verband an.

- [1 Punkt] Ist $(M, \preceq)$ immer noch ein vollständiger Verband wenn $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ eine unendliche Menge ist?

Aufgabe 3: Produktverband [8 Punkte]

a) [4 Punkte] Es seien $(D_1, \preceq_1)$ und $(D_2, \preceq_2)$ vollständige Verbände. Der **Produktverband** ist als $(D_1 \times D_2, \preceq)$ definiert. Hierbei ist $\preceq$ die **Produktordnung** auf Tupeln mit $(d_1, d_2) \preceq (d'_1, d'_2)$ gdw. $d_1 \preceq_1 d'_1$ und $d_2 \preceq_2 d'_2$.

   Zeigen Sie, dass er seinem Namen entsprechend tatsächlich ein vollständiger Verband ist.

b) [4 Punkte] Beweisen Sie: Der Produktverband $(D_1 \times D_2, \preceq)$ erfüllt genau dann die ACC, wenn sowohl $(D_1, \preceq_1)$ als auch $(D_2, \preceq_2)$ die ACC erfüllen.

Aufgabe 4: Distributivität [6 Punkte]
Seien $(D, \leqslant)$ ein Verband und $x, y \in D$.

a) [3 Punkte] Zeigen Sie: Ist $f : D \to D$ monoton, so gilt $f(x \sqcup y) \geqslant f(x) \sqcup f(y)$.

b) [3 Punkte] $f : D \to D$ heißt **distributiv**, falls $f(x \sqcup y) = f(x) \sqcup f(y)$ für alle $x, y \in D$.
   Zeigen Sie: Falls f distributiv ist, so ist f auch monoton.