René Maseli
Prof. Dr. Roland Meyer

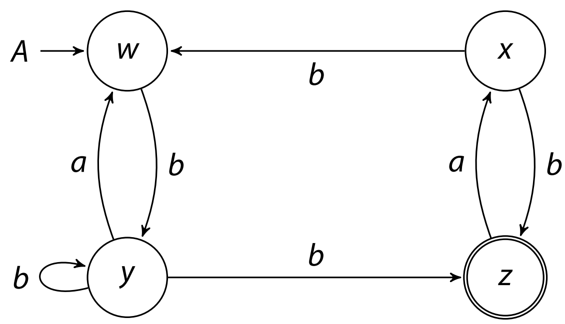
Theoretische Informatik 1
Übungsblatt 3

TU Braunschweig
Wintersemester 2020/21

Ausgabe: 7.12.2021 Abgabe: 16.12.2021, 23:59

Geben Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, 16.12.2021 23:59 Uhr, per E-Mail oder **über das StudIP** an ihren Tutor ab. Fertigen Sie dazu ihre Hausaufgaben direkt in .pdf Form an oder scannen ihre handschriftlichen Hausaufgaben ein.

Aufgabe 1: Homomorphismen [10 Punkte]
Gegeben sei der folgende NFA A über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:



Hinweis: Dieser Automat stimmt mit dem aus dem letzten Aufgabenblatt überein.

a) [5 Punkte] Betrachten Sie den folgenden Homomorphismus $f\colon \Sigma \to \{0, 1\}$.

$$f(a) = 01$$
$$f(b) = 10$$

Konstruieren Sie den Bild-Automaten $f(A)$ mit $\mathcal{L}(f(A)) = f(\mathcal{L}(A))$.

Zeigen Sie, dass $101001100110100110 \in \mathcal{L}(f(A))$ gilt, indem Sie einen entsprechenden Lauf durch A angeben.

b) [5 Punkte] Betrachten Sie den folgenden Homomorphismus $g\colon \{c, d, e\} \to \Sigma$.

$$g(c) = \varepsilon$$
$$g(d) = bbb$$
$$g(e) = ba$$

Konstruieren Sie den Urbild-Automaten $g^{-1}(A)$ mit $\mathcal{L}(g^{-1}(A)) = g^{-1}(\mathcal{L}(A))$.

Zeigen Sie, dass $ceddc \in \mathcal{L}(g^{-1}(A))$ gilt, indem Sie einen entsprechenden Lauf durch A angeben.

Aufgabe 2: Input sanitization [10 Punkte]
Überprüfen Sie die folgenden Probleme darauf, ob diese sich als Probleme über regulären Sprachen auffassen lassen oder nicht. Begründen Sie ihre Antwort indem Sie einen regulären Ausdruck oder einen Automaten angeben, falls möglich, oder argumentieren, dass die Sprache tatsächlich nicht regulär ist. Korrektheitsbeweise sind nicht gefordert.

Nehmen sie als Alphabet $\Sigma = L \cup U \cup D \cup S \cup W$ an, partitioniert auf Kleinbuchstaben L (lower-case), Großbuchstaben U (upper-case), Ziffern D (digits), Sonderzeichen S (special characters) und Leerzeichen W (white spaces).

a) [1 Punkt] Hat der eingegeben Text mindestens 4 Zeichen und höchstens 20 Zeichen?

b) [1 Punkt] Kommt jede Art von Symbol (L, U, D und S) mindestens 1 mal vor?

c) [2 Punkte] *Parenthesization:* Hat der eingegebe Text eine korrekte Klammerung, d.h. jede öffnende Klammer hat eine passende schließende Klammer und umgekehrt. `(ri)(gh)t`, `R(i(g)h)t` sind korrekt, aber `w(r)on)g` und `W(r)o(n(g` nicht.

d) [3 Punkt] *Escaping:* Mit `'` $\in S$ sollen Zeichensequenzen umschlossen werden und mit `\` $\in S$ sollen alle Zeichen außerhalb dieser Sequenzen *escaped* werden können. Nennen wir alle nicht-escaped Zeichen des Wortes *normal*.

   Hat jedes normale öffnende `'` ein schließendes `'` und gibt es keine normale Leer- und Sonderzeichen, die nicht von `'` umschlossen sind? (z.B `\\`, `\'`, `\!`, `'10/05/1998'` oder `'Th!s !s quo\ed and €scapes \\ do nothing \ere\'`)

e) [3 Punkte] *Tabellen:* Haben alle Zeilen (getrennt durch Umbrüche `\n`) die gleiche Anzahl an Spalten (jeweils getrennt durch Kommata `,`)?

Aufgabe 3: Satz 3.18 [8 Punkte]
Es sei $A = (Q, q_0, \rightarrow, Q_F)$ ein NFA über Σ, und $A' = (\mathcal{P}(Q), Q_0, \rightarrow_B, Q_F')$ der durch die Rabin-Scott-Potenzmengenkonstruktion entstehende Automat mit $Q_0 = \{q_0\}$, $X \overset{a}{\rightarrow}{}' \{q \in Q \mid \exists p \in X\colon p \overset{a}{\rightarrow} q\}$ für alle $X \subseteq Q$, und $Q_F' = \{X \subseteq Q \mid X \cap Q_F \neq \emptyset\}$.

Ziel dieser Aufgabe ist es, Satz 3.18 zu beweisen. Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

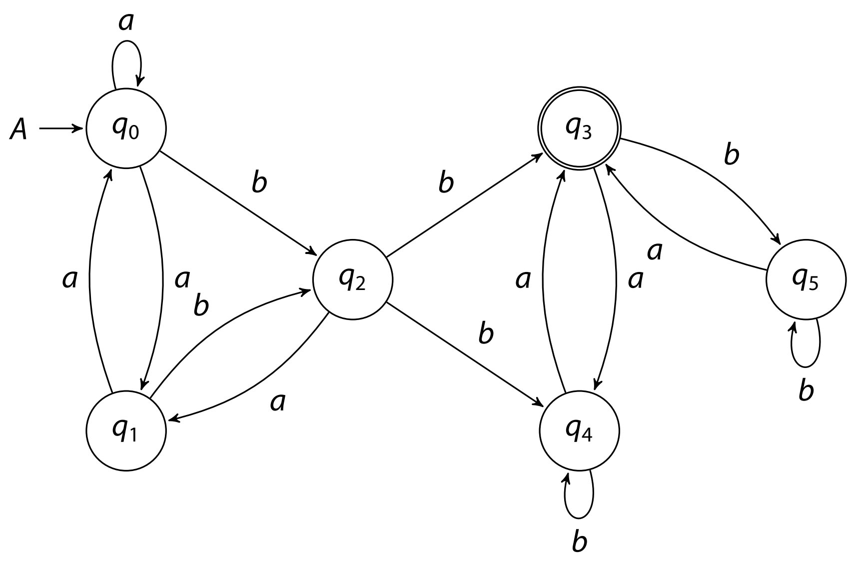
a) [3 Punkte] Zeigen Sie durch Induktion nach i: Zu jedem Lauf $q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_i} q_i$ von A gilt für den (eindeutigen) Lauf $Q_0 \xrightarrow{a_1}{}' Q_1 \xrightarrow{a_2}{}' \dots \xrightarrow{a_i}{}' Q_i$ von A', der das selbe Wort liest, $q_i \in Q_i$.

b) [3 Punkte] Zeigen Sie durch Induktion nach i: Zu jedem Lauf $Q_0 \xrightarrow{a_1}{}' Q_1 \xrightarrow{a_2}{}' \dots \xrightarrow{a_i}{}' Q_i$ von A' und jedem Zustand $q_i \in Q_i$ gibt es einen Lauf $q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_i} q_i$ von A, der das selbe Wort liest und in q_i endet.

c) [2 Punkte] Beweisen Sie unter Verwendung von a) und b), dass $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A')$ gilt.

Aufgabe 4: Potenzmengenkonstruktion und Komplementierung [7 Punkte]

Gegeben sei der folgende NFA A über $\Sigma = \{a, b\}$.



a) [2 Punkte] Determinisieren Sie A, bestimmen Sie also einen DFA B mit $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$ unter Verwendung der Rabin-Scott-Potenzmengenkonstruktion.

   Hinweis: Sie können sich auf die Zustände beschränken, die vom Startzustand $\{q_0\}$ aus erreichbar sind. Konstruieren Sie hierzu zu bereits vorhandenen Zuständen ihre Nachfolger bis Sie keinen neuen Zustände mehr erhalten.

b) [1 Punkt] Vergleichen Sie die Größe der Zustandsmenge von B mit dem Worst-Case-Wert $|\mathcal{P}(\{q_0, \ldots, q_5\})|$.

c) [1 Punkt] Konstruieren Sie den Automaten $\overline{B}$ mit $\mathcal{L}(\overline{B}) = \overline{\mathcal{L}(A)}$.

d) [3 Punkte] Geben Sie exemplarisch für das Wort $w = ababbabba$ alle möglichen Läufe von A auf w und den eindeutigen Lauf von B auf w an. Wie viele Läufe auf w gibt es in A? Gilt $w \in \mathcal{L}(A)$?