René Maseli
Prof. Dr. Roland Meyer

Theoretische Informatik 1
Übungsblatt 1

TU Braunschweig
Wintersemester 2022/23

Ausgabe: 01.11.2022 Abgabe: 11.11.2022, 09:45

Geben Sie Ihre Lösungen bis Freitag, 11.11 09:45 Uhr, im Vips-Verzeichnis der StudIP-Veranstaltung ab. Fertigen Sie dazu ihre Hausaufgaben direkt in .pdf Form an oder scannen ihre handschriftlichen Hausaufgaben ein. Geben Sie in Gruppen von **4 Personen** ab.

Aufgabe 1: [12 Punkte]
Betrachten Sie den vollständigen Verband $\langle \mathbb{N}, \preceq \rangle$. Hierbei ist $\preceq$ eine partielle Ordnung, die wie folgt definiert ist: Für $x, y \in D$ gilt $x \preceq y$ falls $x = 0$, oder $y = 1$ oder $x = y = n$ für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

a) [1 Punkt] Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von $\langle \mathbb{N}, \preceq \rangle$. Beschränken Sie sich auf Zahlen $\leqslant 9$.

b) [1 Punkt] Geben Sie $\top$ und $\bot$ für diesen Verband an.

c) [6 Punkte] Geben Sie die Werte der folgenden Joins und Meets an:

- $\bot \sqcup \top$
- $\bot \sqcap \top$
- $\top \sqcup 5$
- $6 \sqcap 7$
- $\bot \sqcup 4$
- $\bigsqcup \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\}$

d) [2 Punkte] Ist die Höhe dieses Verbandes endlich? Ist die Höhe beschränkt?

e) [2 Punkte] Geben Sie ein Hasse-Diagramm für einen Verband mit endlicher, aber unbeschränkter Höhe, an.

Aufgabe 2: [9 Punkte]
Seien $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ und $M_2 \subseteq \mathbb{N}$ zwei endliche Mengen und $M = M_1 \times M_2$ die Menge aller Tupel $\langle a, b\rangle$ mit $a \in M_1$ und $b \in M_2$. Sei $\preceq$ eine Relation auf M, die wie folgt definiert ist

$$\langle a_1, b_1\rangle \preceq \langle a_2, b_2\rangle \quad \text{gdw.} \quad a_1 \geqslant a_2 \text{ und } b_1 \geqslant b_2$$

wobei $\leqslant$ die gewöhnliche "kleiner gleich" Relation auf den natürlichen Zahlen ist.

a) [3 Punkte] Zeigen Sie dass $\preceq$ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

   Damit ist gezeigt dass $\langle M, \preceq\rangle$ eine partielle Ordnung ist.

b) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass der Join $\bigsqcup M'$ und der Meet $\bigsqcap M'$ für jede Teilmenge $M' \subseteq M$ existieren.

   Damit ist gezeigt, dass $\langle M, \preceq\rangle$ ein vollständiger Verband ist.

c) [1 Punkt] Geben Sie $\top, \bot$ für diesen Verband an.

d) [1 Punkt] Ist $\langle M, \preceq\rangle$ immer noch ein vollständiger Verband, wenn $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ eine unendliche Menge ist?

Aufgabe 3: Produktverband [8 Punkte]

a) [4 Punkte] Es seien $\langle D_1, \preceq_1\rangle$ und $\langle D_2, \preceq_2\rangle$ vollständige Verbände. Der **Produktverband** ist als $\langle D_1 \times D_2, \preceq\rangle$ definiert. Hierbei ist $\preceq$ die **Produktordnung** auf Tupeln mit $\langle d_1, d_2\rangle \preceq \langle d_1', d_2'\rangle$ gdw. $d_1 \preceq_1 d_1'$ und $d_2 \preceq_2 d_2'$.

   Zeigen Sie, dass er seinem Namen entsprechend tatsächlich ein vollständiger Verband ist.

b) [4 Punkte] Beweisen Sie: Der Produktverband $\langle D_1 \times D_2, \preceq\rangle$ erfüllt genau dann die ACC, wenn sowohl $\langle D_1, \preceq_1\rangle$ als auch $\langle D_2, \preceq_2\rangle$ die ACC erfüllen.

Aufgabe 4: Distributivität [6 Punkte]
Seien $\langle D, \leqslant\rangle$ ein Verband und $x, y \in D$.

a) [3 Punkte] Zeigen Sie: Ist $f : D \to D$ monoton, so gilt $f(x \sqcup y) \geqslant f(x) \sqcup f(y)$.

b) [3 Punkte] $f : D \to D$ heißt **distributiv**, falls $f(x \sqcup y) = f(x) \sqcup f(y)$ für alle $x, y \in D$.
   Zeigen Sie: Falls f distributiv ist, so ist f auch monoton.