René Maseli
René Maseli
Thomas Haas

Theoretische Informatik 1
Große Übung 2

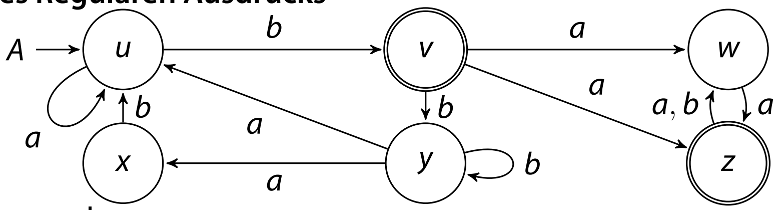
TU Braunschweig
Wintersemester 2023/24

Eigenschaften formaler Sprachen

Die folgenden Gleichungen gelten für formale Sprachen. Sei Σ ein endliches Alphabet und seien $L, K, M \subseteq \Sigma^*$ beliebige Sprachen.

Assoziativität:	$L \cup (K \cup M) = (L \cup K) \cup M$	$L.(K.M) = (L.K).M$	
Kommutativität:	$L \cup K = K \cup L$		
Idempotenz:	$L \cup L = L$	$(L^*)^* = L^*$	
Distributivität:	$L.(K \cup M) = L.K \cup L.M$	$(K \cup M).L = K.L \cup M.L$	
Neutralität:	$L \cup \varnothing = \varnothing \cup L = L$	$L.\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}.L = L$	
Absorption:	$L.\varnothing = \varnothing.L = \varnothing$		
Darüber hinaus:	$L^+ = L^*.L$	$L^* = \{\varepsilon\} \cup L^+$	$L.(K.L)^* = (L.K)^*.L$

Berechnung eines Regulären Ausdrucks



Das Gleichungssystem lautet:

$$U = aU + bV \quad (1) \qquad V = aW + bY + aZ + \varepsilon \quad (2) \qquad W = (a+b)Z \quad (3)$$

$$X = bU \quad (4) \qquad Y = aU + aX + bY \quad (5) \qquad Z = (a+b)W + \varepsilon \quad (6)$$

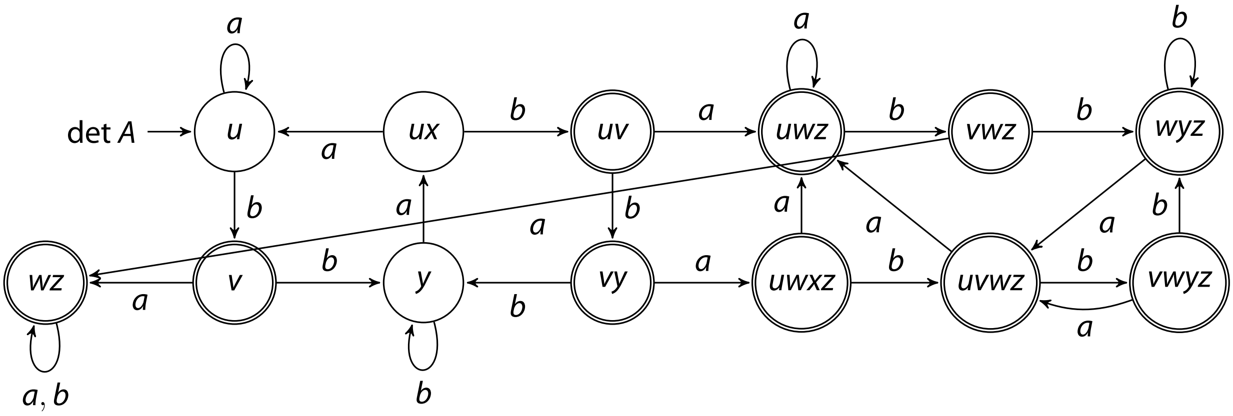
Es lässt sich auf verschiedenen Weisen lösen. Insbesondere benötigt man höchstens sooft Arden's Lemma, wie es Kreise im Graphen gibt. Dieser Automat hat 5 Kreise. Allerdings können überschneidende Kreise gleichzeitig vereinfacht werden.

$$\begin{aligned}
Z &= \varepsilon + (a+b)(a+b)Z && \text{Einfügen von (3) in (6)}\\
&= ((a+b)(a+b))^* && \text{(7) Arden's Lemma}\\
V &= a(a+b)Z + bY + aZ + \varepsilon && \text{Einfügen (3) in (2)}\\
&= bY + (aa+ab+a).Z + \varepsilon && \text{Distributivität}\\
&= bY + (aa+ab+a)((a+b)(a+b))^* + \varepsilon && \text{(8) Einfügen von (7)}\\
Y &= b^*aU + b^*aX && \text{Arden's Lemma in (5)}\\
&= b^*aU + b^*abU && \text{Einfügen von (4)}\\
&= b^*(a+ab)U && \text{(9) Distributivität}\\
\mathcal{L}(A) = U &= aU + b\big(bY + (aa{+}ab{+}a)((a{+}b)(a{+}b))^* + \varepsilon\big) && \text{Einfügen von (8) in (1)}\\
&= aU + b\big(bb^*(a{+}ab)U + (aa{+}ab{+}a)((a{+}b)(a{+}b))^* + \varepsilon\big) && \text{Einfügen von (9)}\\
&= \big(a + bbb^*(a{+}ab)\big)U + b(aa{+}ab{+}a)((a{+}b)(a{+}b))^* + b && \text{Distributivität}\\
&= \big(a + bbb^*(a{+}ab)\big)^*\big(b(aa{+}ab{+}a)((a{+}b)(a{+}b))^* + b\big) && \text{Arden's Lemma}
\end{aligned}$$

Potenzmengenkonstruktion nach Rabin & Scott

Es reichen die erreichbaren Zustände. Dazu starte mit $\{q_0\}$.
Für jedes Symbol in Σ, bestimme die Folgezustandsmenge und füge eine Kante hinzu.
Falls es nun keine Zustände gibt, denen ausgehende Kanten fehlen, ist man fertig.
Sonst, wiederhole den Prozess mit einem solchen Zustand.

(Akzeptierend sind die Zustandsmengen, die einen akzeptierenden Zustand enthalten.)



Komplementierung eines DFA: Akzeptierend sind nun die Zustände, die keinen akzeptierenden Zustand enthalten. $Q''_F := \{\, Q' \subseteq Q \mid \text{ nicht } \exists q \in Q' : q \in Q_F \,\}$