Theoretische Informatik 2
Übungsblatt 2

René Maseli
Prof. Dr. Roland Meyer

TU Braunschweig
Sommersemester 2022

Ausgabe: 10.05.2022 Abgabe: 20.05.2022, 23:59

Geben Sie Ihre Lösungen bis Freitag, den 20.05.2022 um 23:59 Uhr, ab. Hinterlassen Sie sie dazu im passenden Fach des Briefkastens vor IZ 343 oder laden Sie sie in den passenden Ordner auf Stud.IP hoch. Achten Sie darauf, dass Studiengang, Name, Vorname und Matrikelnummer jedes Gruppenmitglieds lesbar vorne auf Ihrer Abgabe zu finden sind.

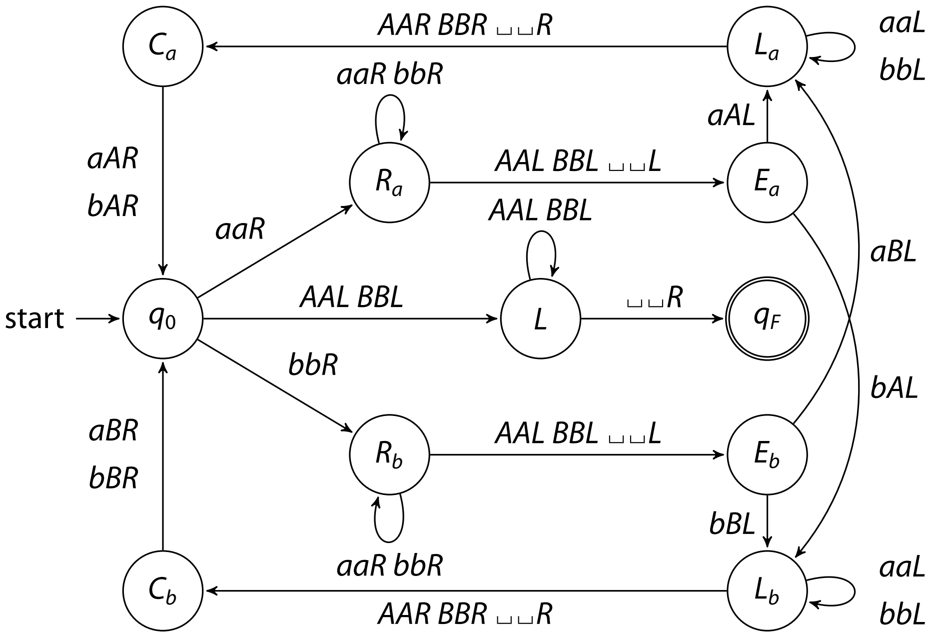
Aufgabe 1: Von PDAs zu Turing-Maschinen [5 Punkte]
In der letzten Hausaufgabe haben Sie gezeigt, dass reguläre Sprachen durch TMs erkannt werden, indem Sie zu einem NFA eine entsprechende NTM gebaut haben. Nun sollen Sie zeigen, dass TMs auch kontextfreie Sprachen erkennen.

Konstruieren Sie zu einem beliebigen PDA $A = \langle Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \#, \delta \rangle$ mit Akzeptanz beim leeren Stack, eine NTM M mit $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(A)$. Erklären Sie, warum ihre Konstruktion korrekt ist.

Hinweis: Benutzen Sie eine 2-Band NTM.

Aufgabe 2: Interpretation einer TM [6 Punkte]
Betrachten Sie die Turing-Maschine $M = \langle Q, \{a, b\}, \{a, b, A, B, \sqcup\}, \delta, q_0, \{q_F\} \rangle$

wobei $Q = \{q_0, R_a, R_b, L_a, L_b, E_a, E_b, C_a, C_b, L, q_F\}$ und δ gegeben ist durch folgenden Graphen.



Geben Sie die berechnete (partielle) Funktion an, sowie eine informelle Beschreibung der Arbeitsweise. Beschreiben Sie dabei kurz welche "Aufgaben" die einzelnen Zustände haben.

Aufgabe 3: Komposition von berechenbaren Funktionen [8 Punkte]
Seien $f: A \to_p B$ und $g: B \to_p C$ partielle berechenbare Funktionen. Zeigen Sie formal per Konstruktion einer TM, dass die Komposition $(g \circ f): A \to_p C$ mit $(g \circ f)(w) = g(f(w))$ berechenbar ist. In welchen Fällen ist diese Funktion undefiniert?

Bemerkung: Es reicht nicht einfach naiv beide TMs von f und g hintereinander auszuführen. Warum nicht? Unter welchen Umständen könnte dies zu Problemen führen? Schauen Sie sich noch einmal die Definition von TMs als Berechnungsmodel im Skript an.

Aufgabe 4: Entscheider [5 Punkte]

1. [2 Punkte] Betrachten Sie das Problem **List Membership** und die dazugehörige Sprache über $\Sigma = \{0, 1, \#\}$. Konstruieren Sie formal einen Entscheider für $L_{\text{List Membership}}$. Sie dürfen auch mehrere Bänder benutzen.

List Membership	
Gegeben:	Liste von Zahlen $n_0, n_1, \ldots, n_{m-1} \in \mathbb{N}$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$
Frage:	Taucht k in der Liste auf?

$L_{\text{List Membership}} := \{w_0\#w_1\#\ldots\#w_m\#x \mid \forall j \leq m: w_j \in \{0, 1\}^* \text{ UND } \exists i \leq m: x = w_i\}$

2. [3 Punkte] Zeigen Sie, dass das Problem **Uniqueness** entscheidbar ist. Nutzen Sie dazu eine Darstellung Ihrer Wahl. Dazu können Sie Ihren Entscheider für $L_{\text{List Membership}}$ als Subroutine benutzen.

Uniqueness	
Gegeben:	Liste von Zahlen $n_0, n_1, \ldots, n_{m-1} \in \mathbb{N}$
Frage:	Sind alle Zahlen in der Liste paarweise verschieden?

$L_{\text{Uniqueness}} := \{w_0\#w_1\#\ldots\#w_m \mid \forall j \leq m: w_j \in \{0, 1\}^* \text{ UND } \forall i, j \leq m: i \neq j \to w_i \neq w_j\}$

Aufgabe 5: Operationen auf entscheidbaren Sprachen [6 Punkte]
Es seien $K, L \subseteq \Sigma^*$ entscheidbare Sprachen. Beweisen Sie, dass sowohl die Vereinigung $K \cup L$, der Schnitt $K \cap L$, als auch die Konkatenation $K.L = \{k.l \in \Sigma^* \mid k \in K, l \in L\}$ entscheidbar sind.

Geben Sie dabei jeweils an, wie man einen Entscheider für die Sprachen konstruiert und erläutern Sie dessen Arbeitsweise. Eine formale Konstruktion und eine Angabe als Tupel ist hierbei nicht notwendig.