René Maseli
Prof. Dr. Roland Meyer

Theoretische Informatik 2
Übungsblatt 5

TU Braunschweig
Sommersemester 2022

Ausgabe: 28.06.2022 Abgabe: 08.07.2022, 23:59

Geben Sie Ihre Lösungen bis Freitag, den 08.07.2022 um 23:59 Uhr, ab. Hinterlassen Sie sie dazu im passenden Fach des Briefkastens vor IZ 343 oder laden Sie sie in den passenden Ordner hoch. Achten Sie darauf, dass Studiengang, Name, Vorname und Matrikelnummer jedes Gruppenmitglieds lesbar vorne auf Ihrer Abgabe zu finden sind.

Aufgabe 1: Härte und Vollständigkeit [8 Punkte]
Beweisen Sie die folgenden Lemmata:

a) [4 Punkte] Sei $\mathcal{C}$ eine Komplexitätsklasse, R eine Menge von Funktionen und $A \in \mathcal{C}$ ein Problem. Wenn A $\mathcal{C}$-hart/vollständig ist, dann ist $\overline{A}$ co$\mathcal{C}$-hart/vollständig (jeweils bezüglich R-many-one-Reduktionen).

b) [4 Punkte] Seien A, B Probleme mit $A \leq_m^{\log} B$. Wenn B in NL ist, dann auch A.

   Hinweis: Wie in der Vorlesung angemerkt, ist die Ausgabe $f(x)$ einer logspace-Reduktion höchstens polynomiell groß, d.h. es gibt einen konstanten Exponenten $k \in \mathbb{N}$ mit $|f(x)| \in \mathcal{O}(|x|^k)$.

Aufgabe 2: Vollständigkeit in L [6 Punkte]
Sei Σ ein endliches Alphabet. Beweisen Sie:

a) [3 Punkte] Ein Problem $A \subseteq \Sigma^*$ ist in L genau dann, wenn $A \leq_m^{\log} \{\varepsilon\}$. Hier bezeichnet $\{\varepsilon\}$ die Problem der Leerheit der Eingabe.

b) [3 Punkte] Jede Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ in L mit $A \neq \emptyset$ und $A \neq \Sigma^*$ ist bereits L-vollständig (bezüglich logspace-many-one-Reduktionen).

Aufgabe 3: Erreichbarkeit in azyklischen Graphen [11 Punkte]
In der Vorlesung wurde die NL-Vollständigkeit von PATH gezeigt. Wir interessieren uns im folgenden nun für weitere NL-vollständige Probleme.

Pfadexistenz mit Zwischenknoten (INTERPATH)	
Gegeben:	Gerichteter azyklischer Graph $G = \langle V, R \rangle$, Knoten $s, t, u \in V$
Frage:	Gibt es einen Pfad von s über t nach u in G?

a) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass INTERPATH NL-vollständig ist, indem Sie zuerst INTERPATH $\leq_m^{\log}$ PATH, und anschließend PATH $\leq_m^{\log}$ INTERPATH zeigen.

Pfadexistenz in azyklischen Graphen (ACYCPATH)

Gegeben: Gerichteter azyklischer Graph $G = \langle V, R \rangle$, Knoten $s, t \in V$

Frage: Gibt es einen Pfad von s nach t in G?

b) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass sich das Problem PATH auf ACYCPATH reduzieren lässt. Geben Sie die Funktion explizit an und beweisen Sie, dass sie eine logspace-many-one-Reduktion ist.

Azyklizität (ACYCLIC)

Gegeben: Gerichteter Graph $G = \langle V, R \rangle$

Frage: Ist G azyklisch?

c) [4 Punkte] Beim Problem ACYCPATH nehmen wir an, dass die Eingabe ein azyklischer Graph ist. Wir wollen nun für einen gegebenen Graphen feststellen, ob er diese Eigenschaft hat. Beweisen Sie, dass ACYCLIC selbst bereits NL-vollständig ist.

Hinweis: Reduzieren Sie ACYCPATH auf $\overline{\text{ACYCLIC}}$ und verwenden Sie den Satz von Immerman und Szelepcsényi (NL = coNL).

Aufgabe 4: Abschlusseigenschaften von NL [10 Punkte]

Im folgenden betrachten wir die Klassen der NL und NL-vollständigen Probleme.

a) [5 Punkte] Zeigen Sie, dass die Klasse NL unter den folgenden Operationen abgeschlossen ist:

- Vereinigung
- Durchschnitt
- Komplement
- Kleene Stern

b) [5 Punkte] Nun untersuchen Sie die Klasse der NL-harten Probleme auf Abgeschlossenheit unter folgenden Operationen:

- Vereinigung
- Durchschnitt
- Komplement