René Maseli
Prof. Dr. Roland Meyer

Theoretische Informatik 2
Übungsblatt 6

TU Braunschweig
Sommersemester 2022

Ausgabe: 12.07.2022 Abgabe: 22.07.2022

Geben Sie Ihre Lösungen bis Freitag, den 08.07.2022 um 23:59 Uhr, ab. Hinterlassen Sie sie dazu im passenden Fach des Briefkastens vor IZ 343 oder laden Sie sie in den passenden Ordner hoch. Achten Sie darauf, dass Studiengang, Name, Vorname und Matrikelnummer jedes Gruppenmitglieds lesbar vorne auf Ihrer Abgabe zu finden sind.

Aufgabe 1: Erfüllende Belegungen berechnen [5 Punkte]

Zeigen Sie: Wenn wir SAT in P lösen könnten, dann könnten wir auch für jede Formel F in CNF eine erfüllende Belegung in P berechnen. Geben Sie dazu einen Algorithmus in Pseudo-Code an.

Bemerkung: Eine erfüllende Belegung zu berechnen ist stärker als nur die Existenz solch einer Belegung zu finden.

Aufgabe 2: Tautologien [9 Punkte]

Wir betrachten die folgenden Probleme für aussagenlogische Formeln.

Allgemeingültigkeit (VALIDITY)

Gegeben: Aussagenlogische Formel F in CNF
Frage: Ist F allgemeingültig, also eine Tautologie?

a) [5 Punkte] Beweisen Sie, dass VALIDITY coNP-vollständig bezüglich Logspace-Reduktionen ist.

Hinweis: Mit Hilfe der Tseitin-Transformation lässt sich in Logspace zu einer beliebigen aussagenlogischen Formel eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in CNF berechnen.

Implikationstest (ENTAILMENT)

Gegeben: Aussagenlogische Formeln F, F' in CNF
Frage: Impliziert die Formel F die Formel F'?

b) [4 Punkte] Beweisen Sie, dass ENTAILMENT coNP-vollständig bezüglich Logspace-Reduktionen ist.

Aufgabe 3: Sudoku [7 Punkte]

Betrachten Sie das folgende Problem.

<u>**SUDOKU**</u>

Gegeben: Eine $n^2 \times n^2$ Sudoku-Matrix M mit Einträgen in $\{1, \ldots, n^2, ?\}$

Frage: Gibt es eine Möglichkeit die $?$-Einträge so zu ersetzen, dass ein korrekt ausgefülltes Sudoku herauskommt?

Eine $n^2 \times n^2$ Sudoku-Matrix M ist in n^2 viele $(n \times n)$-Blöcke unterteilt. M ist korrekt ausgefüllt, wenn in jedem Block, in jeder Zeile und in jeder Spalte alle Zahlen von 1 bis n^2 genau einmal vorkommen.

Es ist leicht zu sehen, dass SUDOKU in NP liegt, denn wir können die fehlenden Einträge raten und effizient überprüfen. Das heißt auch, dass es eine polytime-Reduktion von SUDOKU auf SAT geben muss.

Finden Sie nun solch eine Reduktion von SUDOKU auf SAT. **Bemerkung:** Man kann sogar zeigen, dass SUDOKU NP-vollständig ist.

Aufgabe 4: Cliquen [9 Punkte]

In einem ungerichteten Graphen bezeichnet eine Clique eine Teilmenge von Knoten, welche paarweise vollständig verbunden sind (über unterschiedliche Knoten). Zeigen Sie, dass das folgende Problem NP-vollständig bezüglich logspace-many-one-Reduktionen ist.

Sie können annehmen, dass die Kodierung eines ungerichteten Graphen alle Self-Loops $\langle v, v\rangle$ enthält (die Diagonale der Adjazenzmatrix soll nur 1 enthalten), und zu jeder enthaltenen Kante $\langle u, v\rangle$ auch ihre Rückrichtung $\langle v, u\rangle$ enthält (die Matrix ist identisch mit ihrer Transponierten).

<u>**CLIQUE**</u>

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = \langle V, E\rangle$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$

Frage: Gibt es $S \subseteq V$ mit $|S| = k$ und $\forall u, v \in S\colon \langle u, v\rangle \in E$?

a) [3 Punkte] Zeigen Sie CLIQUE $\in$ NP.

b) [6 Punkte] Zeigen Sie, dass CLIQUE NP-hart bezüglich logspace-many-one-Reduktionen ist.

   Hinweis: Überlegen Sie, wie Sie Ihren Graphen in endlich viele disjunkte Partitionen organisieren, sodass jede Clique genau einen Knoten aus jeder Partition enthält.