René Maseli
Prof. Dr. Roland Meyer

# Theoretische Informatik 2
# Übungsblatt 2

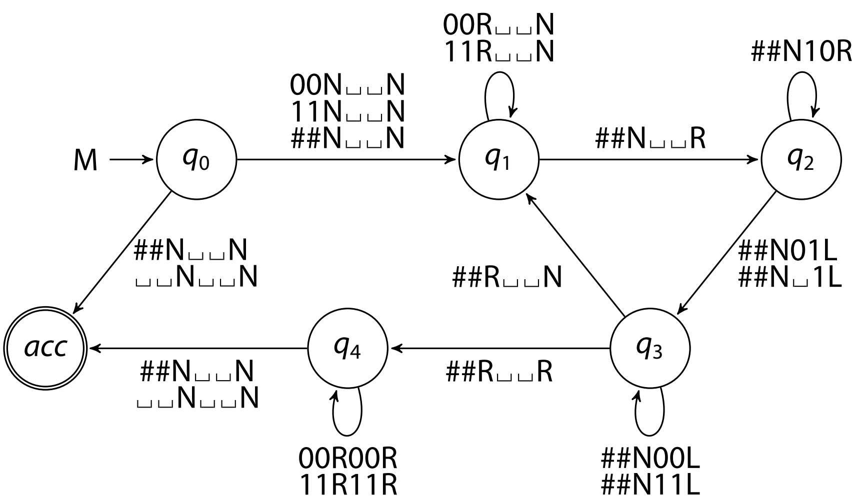
TU Braunschweig
Sommersemester 2023

Ausgabe: 02.05.2023 Abgabe: 10.05.2023,18:30

Geben Sie Ihre Lösungen bis Mittwoch, den 10.05.2023 um 18:30 Uhr, ab. Laden Sie sie dazu als PDF oder Scan im Vips im Stud.IP hoch. Geben Sie als 4er-Gruppe ab. Achten Sie darauf, dass **Studiengang, Name Vorname und Matrikelnummer** jedes Gruppenmitglieds lesbar vorne auf Ihrer Abgabe zu finden sind.

**Hausaufgabe 1: TM-Analyse [9 Punkte]**

Betrachten Sie die folgende nicht-deterministische 2-Band-Turing-Maschine *M*. Die Label des Zustandsgraphen sind also 6-Tupel aus $(\Gamma \times \Gamma \times \{L, N; R\})^2$.




a) [2 Punkte] Geben Sie eine akzeptierenden Berechnung von *M* auf der Eingabe 1#01#01#101 an.

b) [6 Punkte] Beschreiben Sie die Funktionsweise von *M*, insbesondere die jedes einzelnen Kontrollzustands. (Hinweis: Es kommt die Binärdarstellung least-significant-bit-first zum Einsatz.)

c) [1 Punkt] Wie hoch schätzen Sie den Zeit- und Platzverbrauch von *M* in Abhängigkeit von der Länge der Eingabe? (Hier reicht eine informelle Antwort. Die genauen Definitionen folgen in einem späteren Kapitel der Vorlesung.)

**Hausaufgabe 2: Entscheidbarkeit [7 Punkte]**

Zeigen Sie, dass das Problem **Prime Number** entscheidbar ist.

| | |
|---|---|
| **Prime Number** | |
| **Gegeben:** | Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ |
| **Frage:** | Ist $n$ eine Primzahl? |

a) [1 Punkt] Skizzieren Sie kurz eine Idee für einen Algorithmus, welcher auf jede Eingabe nach endlich vielen Schritten hält und genau dann akzeptiert, wenn die Eingabe-Zahl eine Primzahl ist.

b) [4 Punkte] Geben Sie den Algorithmus im Pseudo-Code Ihrer Wahl an.

c) [2 Punkte] Wenn jede zu speichernde Variable ein eigenes Arbeitsband bekommt, wieviele Bänder hätte die Turing-Maschine, die Ihren Algorithmus implementiert?

**Die folgenden Aufgaben werden nicht zum Bestehen der Studienleistung benötigt.**

**Übungsaufgabe 3:**

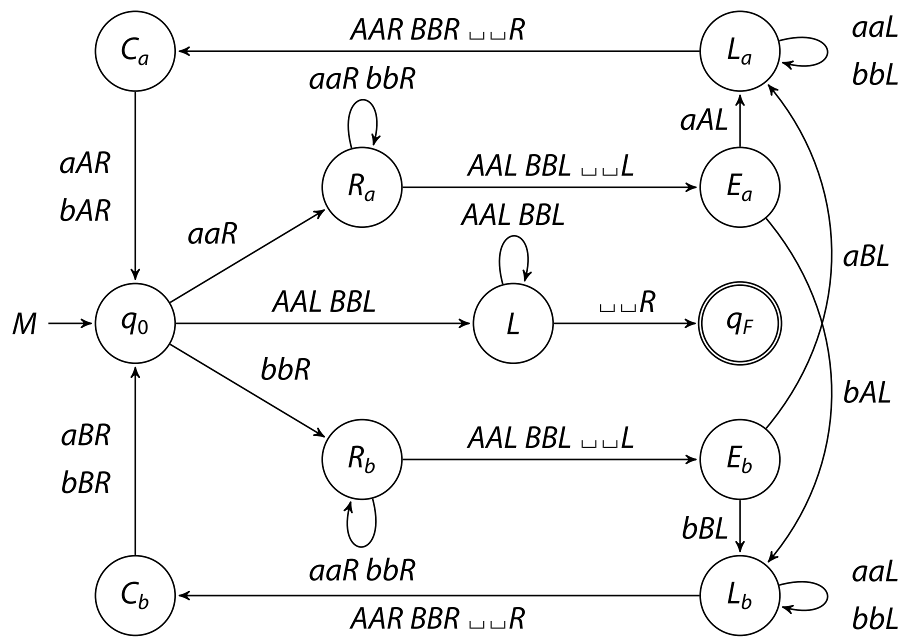
Konstruieren Sie zu einem beliebigen PDA $A = \langle Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \#, \delta \rangle$ mit Akzeptanz beim leeren Stack, eine NTM $M$ mit $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(A)$. Erklären Sie, warum ihre Konstruktion korrekt ist.

**Hinweis:** Benutzen Sie eine 2-Band NTM.

**Übungsaufgabe 4:**

Betrachten Sie die Turing-Maschine $M = \langle Q, \{a, b\}, \{a, b, A, B, ␣\}, \delta, q_0, \{q_F\} \rangle$

wobei $Q = \{q_0, R_a, R_b, L_a, L_b, E_a, E_b, C_a, C_b, L, q_F\}$ und $\delta$ gegeben ist durch folgenden Graphen.




Geben Sie die berechnete (partielle) Funktion an, sowie eine informelle Beschreibung der Arbeitsweise. Beschreiben Sie dabei kurz welche „Aufgaben" die einzelnen Zustände haben.

**Übungsaufgabe 5:**

Seien $f\colon A \to_p B$ und $g\colon B \to_p C$ partielle berechenbare Funktionen. Zeigen Sie formal per Konstruktion einer TM, dass die Komposition $(g \circ f)\colon A \to_p C$ mit $(g \circ f)(w) = g(f(w))$ berechenbar ist. In welchen Fällen ist diese Funktion undefiniert?

**Bemerkung:** Es reicht nicht einfach naiv beide TMs von $f$ und $g$ hintereinander auszuführen. Warum nicht? Unter welchen Umständen könnte dies zu Problemen führen? Schauen Sie sich noch einmal die Definition von TMs als Berechnungsmodel im Skript an.

**Übungsaufgabe 6:**
Betrachten Sie das Problem **List Membership** und die dazugehörige Sprache über $\Sigma = \{0, 1, \#\}$. Konstruieren Sie formal einen Entscheider für $L_{\text{List Membership}}$. Sie dürfen auch mehrere Bänder benutzen.

| **List Membership** | |
|---|---|
| **Gegeben:** | Liste von Zahlen $n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ |
| **Frage:** | Taucht $k$ in der Liste auf? |

$L_{\text{List Membership}} := \{w_1\#w_2\# \dots \#w_m\#x \mid \forall j \leq m\colon w_j \in \{0, 1\}^* \text{ UND } \exists i \in \{1 \dots m\}\colon x = w_i\}$

**Übungsaufgabe 7:**
Zeigen Sie, dass das Problem **Uniqueness** entscheidbar ist. Nutzen Sie dazu eine Darstellung Ihrer Wahl. Dazu können Sie Ihren Entscheider für $L_{\text{List Membership}}$ als Subroutine benutzen (siehe vorherige Aufgabe).

| **Uniqueness** | |
|---|---|
| **Gegeben:** | Liste von Zahlen $n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ |
| **Frage:** | Sind alle Zahlen in der Liste paarweise verschieden? |

$L_{\text{Uniqueness}} := \{w_1\#w_2\# \dots \#w_m \mid \forall j \in \{1 \dots m\}\colon w_j \in \{0, 1\}^* \text{ UND } \forall i, j \in \{1 \dots m\}\colon i \neq j \rightarrow w_i \neq w_j\}$

**Übungsaufgabe 8:**
Es seien $K, L \subseteq \Sigma^*$ entscheidbare Sprachen. Beweisen Sie, dass sowohl die Vereinigung $K \cup L$, der Schnitt $K \cap L$, als auch die Konkatenation $K.L = \{k.l \in \Sigma^* \mid k \in K, l \in L\}$ entscheidbar sind.

Geben Sie dabei jeweils an, wie man einen Entscheider für die Sprachen konstruiert und erläutern Sie dessen Arbeitsweise. Eine formale Konstruktion und eine Angabe als Tupel ist hierbei nicht notwendig.