Theoretical Computer Science 2
Exercise Sheet 2

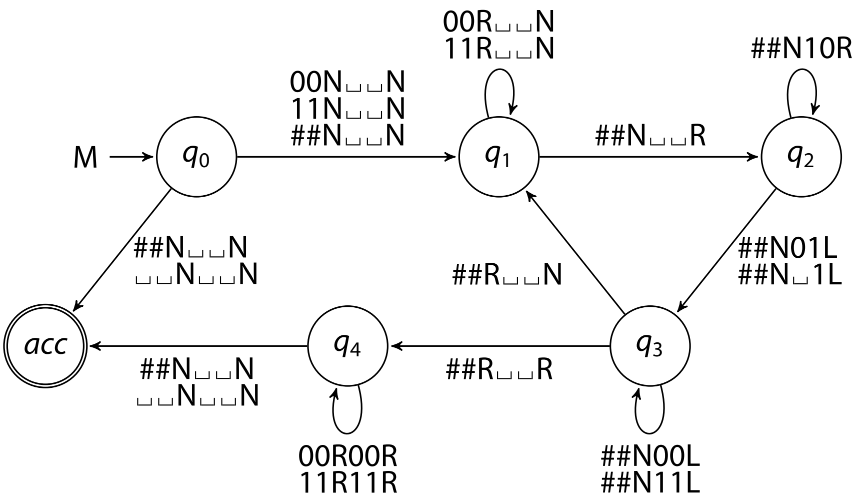
René Maseli
Prof. Dr. Roland Meyer
TU Braunschweig
Summer semester 2023

Release: 02.05.2023 Due: 10.05.2023,18:30

Hand in your solutions to the Vips directory of the Stud.IP course until wednesday, 10.05.2023 06:30 pm. You should provide your solutions either directly as PDF file or as a readable scan or photo of your handwritten notes. Submit your results as a group of four. On the front page, state the **degree programme, name, surname and student id** of each member of your group.

Homework Exercise 1: TM Analysis [9 points]

Given the following non-deterministic Turing Machine M with two tapes. It is labeled by 6-tuples in $(\Gamma \times \Gamma \times \{L, N; R\})^2$.



a) [2 points] Give an accepting computation of M on input $1\#1\#1$.

b) [6 points] Describe the behavior of the machine M, especially the behavior of each of its control states. (Hint: It uses least-significant-bit-first encoding)

c) [1 point] Estimate the time and space requirements of M in relation to the length of an input. (Just an informal answer is enough. More precise definitions will be given in a later lecture.)

Homework Exercise 2: Decidability [7 points]

Show that the problem **Prime Number** is decidable.

<u>**Prime Number**</u>

Given:	A number $n \in \mathbb{N}$
Question:	Is n a prime number?

a) [1 point] Draft a short concept of an algorithm which will halt regardless the input and accepts if and only if the input number is a prime.

b) [4 points] Give an algorithm in pseudo code.

c) [2 points] If all variables of your algorithm get one tape of their own, how many tapes would such a Turing Machine have, that implements your algorithm?

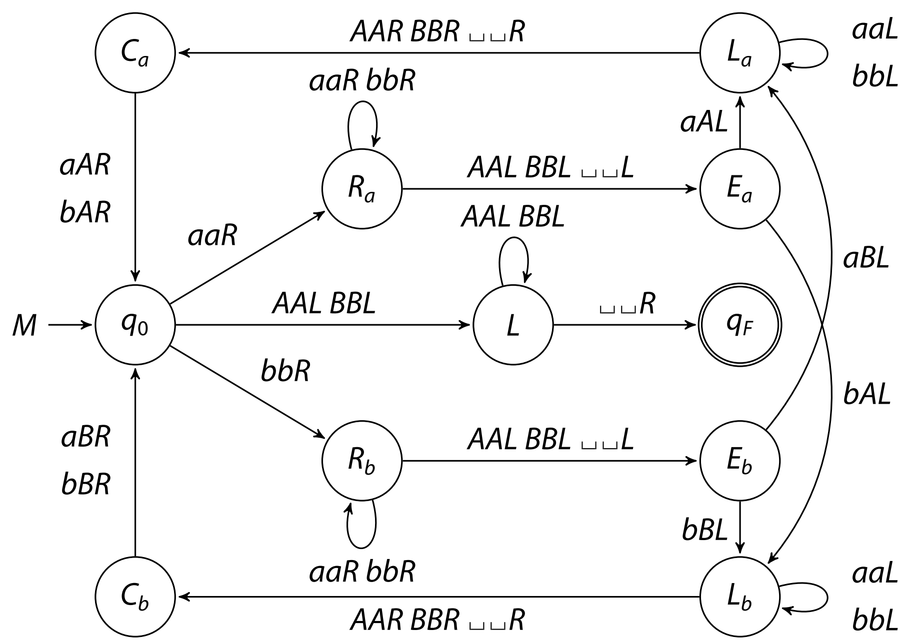
The following exercises are optional.

Exercise 3:
Konstruieren Sie zu einem beliebigen PDA $A = \langle Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \#, \delta \rangle$ mit Akzeptanz beim leeren Stack, eine NTM M mit $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(A)$. Erklären Sie, warum ihre Konstruktion korrekt ist.

Hinweis: Benutzen Sie eine 2-Band NTM.

Exercise 4:
Betrachten Sie die Turing-Maschine $M = \langle Q, \{a, b\}, \{a, b, A, B, \sqcup\}, \delta, q_0, \{q_F\} \rangle$

wobei $Q = \{q_0, R_a, R_b, L_a, L_b, E_a, E_b, C_a, C_b, L, q_F\}$ und δ gegeben ist durch folgenden Graphen.



Geben Sie die berechnete (partielle) Funktion an, sowie eine informelle Beschreibung der Arbeitsweise. Beschreiben Sie dabei kurz welche „Aufgaben" die einzelnen Zustände haben.

Exercise 5:
Seien $f\colon A \to_p B$ und $g\colon B \to_p C$ partielle berechenbare Funktionen. Zeigen Sie formal per Konstruktion einer TM, dass die Komposition $(g \circ f)\colon A \to_p C$ mit $(g \circ f)(w) = g(f(w))$ berechenbar ist. In welchen Fällen ist diese Funktion undefiniert?

Bemerkung: Es reicht nicht einfach naiv beide TMs von f und g hintereinander auszuführen. Warum nicht? Unter welchen Umständen könnte dies zu Problemen führen? Schauen Sie sich noch einmal die Definition von TMs als Berechnungsmodel im Skript an.

Exercise 6:

Betrachten Sie das Problem **List Membership** und die dazugehörige Sprache über $\Sigma = \{0, 1, \#\}$. Konstruieren Sie formal einen Entscheider für $L_{\text{List Membership}}$. Sie dürfen auch mehrere Bänder benutzen.

List Membership	
Given:	Liste von Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$
Question:	Taucht k in der Liste auf?

$L_{\text{List Membership}} := \{w_1\#w_2\# \ldots \#w_m\#x \mid \forall j \leq m\colon w_j \in \{0, 1\}^* \text{ UND } \exists i \in \{1 \ldots m\}\colon x = w_i\}$

Exercise 7:

Zeigen Sie, dass das Problem **Uniqueness** entscheidbar ist. Nutzen Sie dazu eine Darstellung Ihrer Wahl. Dazu können Sie Ihren Entscheider für $L_{\text{List Membership}}$ als Subroutine benutzen (siehe vorherige Aufgabe).

Uniqueness	
Given:	Liste von Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$
Question:	Sind alle Zahlen in der Liste paarweise verschieden?

$L_{\text{Uniqueness}} := \{w_1\#w_2\# \ldots \#w_m \mid \forall j \in \{1 \ldots m\}\colon w_j \in \{0, 1\}^* \text{ UND } \forall i, j \in \{1 \ldots m\}\colon i \neq j \rightarrow w_i \neq w_j\}$

Exercise 8:

Es seien $K, L \subseteq \Sigma^*$ entscheidbare Sprachen. Beweisen Sie, dass sowohl die Vereinigung $K \cup L$, der Schnitt $K \cap L$, als auch die Konkatenation $K.L = \{k.l \in \Sigma^* \mid k \in K, l \in L\}$ entscheidbar sind.

Geben Sie dabei jeweils an, wie man einen Entscheider für die Sprachen konstruiert und erläutern Sie dessen Arbeitsweise. Eine formale Konstruktion und eine Angabe als Tupel ist hierbei nicht notwendig.