Theoretische Informatik 2
Übungsblatt 4

René Maseli
Prof. Dr. Roland Meyer

TU Braunschweig
Sommersemester 2023

Ausgabe: 02.06.2023 Abgabe: 14.06.2023, 18:30

Geben Sie Ihre Lösungen bis Mittwoch, den 14.06.2023 um 18:30 Uhr, ab. Laden Sie sie dazu als PDF oder Scan im Vips im Stud.IP hoch. Geben Sie als 4er-Gruppe ab. Achten Sie darauf, dass **Studiengang, Name Vorname und Matrikelnummer** jedes Gruppenmitglieds lesbar vorne auf Ihrer Abgabe zu finden sind.

Hausaufgabe 1: Reduktion [7 Punkte]
Zeigen Sie mit einer geeigneten Reduktion, dass die folgenden Probleme unentscheidbar sind.

Triple-PCP

Gegeben: Eine endliche Sequenz von Tripeln $\langle x_1, y_1, z_1\rangle, \ldots, \langle x_k, y_k, z_k\rangle$ aus Wörtern über $\{0, 1\}$.

Frage: Gibt es eine nicht-leere Sequenz von Indizes $i_1, \ldots, i_n$ mit $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n} = y_{i_1}, \ldots, y_{i_n} = z_{i_1}, \ldots, z_{i_n}$?

a) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass das Triple-PCP nicht co-semi-entscheidbar ist.

Gegeben sei die folgende partielle Funktion choose : TM × TM × $\{0, 1\}^* \to \{0, 1\}$:

$$\text{choose}(\langle M_0\rangle, \langle M_1\rangle, x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathcal{L}(M_0) \\ 1 & \text{falls } x \in \mathcal{L}(M_1) \setminus \mathcal{L}(M_0) \\ \text{undefiniert} & \text{falls } x \notin \mathcal{L}(M_0) \cup \mathcal{L}(M_1) \end{cases}$$

b) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass choose unberechenbar ist.

Hinweis: Intuitiv wird es Eingaben geben, die zu 1 abgebildet gehören, aber die eine Turing-Maschine nicht nach endlich vielen Schritten zuordnen kann.

Hausaufgabe 2: Der Satz von Rice [8 Punkte]
Wenden Sie den Satz von Rice, falls möglich, auf die folgenden Sprachen an. Geben Sie dazu jeweils entweder eine positive und negative rekursiv-aufzählbare Sprache, eine positive Turing-Maschine und eine sprachäquivalente negative Turing-Maschine, oder die triviale Lösung an.

a) [2 Punkte] $L_1 = \{\langle M\rangle \mid M$ kehrt vor dem Akzeptieren immer zum linken Ende des Bandes zurück. $\}$

b) [2 Punkte] $L_2 = \{\langle M\rangle \mid M$ lehnt jedes Wort mit weniger als 50 Buchstaben ab. $\}$

c) [2 Punkte] $L_3 = \{\langle M\rangle \mid \mathcal{L}(M) = \text{SELF-ACCEPT}\}$

d) [2 Punkte] $L_4 = \{\langle M\rangle \mid \forall x \in \{0, 1\}^* : x \in \mathcal{L}(M) \Leftrightarrow x^{reverse} \notin \mathcal{L}(M)\}$

Hausaufgabe 3: Akzeptanz-Problem regulärer Sprachen [5 Punkte]
Wir haben bereits in Übungsblatt 1 gesehen, dass das Wortproblem regulärer Sprachen durch Turingmaschinen entschieden werden kann, welche sich immer nach Rechts bewegen und auf Blank sofort halten. Dabei wird kein zusätzlicher Speicher benötigt, denn die Sprache ist für jedes Wort-Problem bekannt. Das ändert sich, wenn der NFA Teil der Eingabe wird.

Wir definieren nun die Sprache

$$\text{REG-ACCEPT} = \{w\#x \mid M_w \text{ beschreibt einen endlichen Automaten und } x \in \mathcal{L}(M_w)\} .$$

a) [5 Punkte] Zeigen Sie REG-ACCEPT $\in L$, indem Sie die Arbeitsweise eines Entscheiders mit einer festen Zahl logarithmisch beschränkter Arbeitsbänder angeben.

Hinweis. Sie können annehmen, dass die kodierte Turingmaschine deterministisch ist.

Übungsaufgabe 4:
Wenden Sie den Satz von Rice, falls möglich, auf die folgenden Sprachen an. Begründen Sie jeweils, warum oder warum nicht der Satz angewendet werden kann.
$L_5 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \mathcal{L}(M_w) \text{ ist nicht entscheidbar.} \}$
$L_6 = \{\langle M\rangle \mid \mathcal{L}(M) \leq \text{ACCEPT}\}$
$L_7 = \{\langle M\rangle \mid \text{ es gibt } n \leq |\delta_M| \text{ mit } 0^n \in \mathcal{L}(M)\}$
$L_8 = \{\langle M\rangle \mid \{0011\}.\mathcal{L}(M) = \Sigma^*\}$

Übungsaufgabe 5:
Betrachten Sie die Sprache TOTAL = $\{\langle M\rangle \mid M \text{ ist ein Entscheider.}\}$. Warum kann der Satz von Rice hier nicht angewendet werden? Was ist der Unterschied zu Aufgabenteil (a) in der vorherigen Aufgabe 1?

Zeigen Sie per Reduktion, dass TOTAL weder semi-entscheidbar noch co-semi-entscheidbar ist.

Hinweis. Sie haben in der letzten Hausaufgabe bereits von einer Sprache gezeigt, dass diese weder semi-entscheidbar noch co-semi-entscheidbar ist.

Übungsaufgabe 6:
Betrachten Sie die folgende Sprache $L_{\text{Copy}} = \{w\#w \mid w \in \{a,b\}^*\} \subseteq \{a,b,\#\}^*$.

Ordnen Sie die Sprache L_{Copy} möglichst genau in die folgenden Klassen ein: $DTIME(O(f(n)))$, $NTIME(O(g(n)))$, $DSPACE(O(h(n)))$ und $NSPACE(O(j(n)))$. Findet Sie dazu möglichst kleine Funktionen f, g, h und j, sodass L_{Copy} in den jeweiligen Klassen enthalten ist.

Begründen Sie ihre Wahl, indem Sie jeweils die Arbeitsweise einer passenden Turingmaschine erklären (genaue Konstruktionen sind unnötig).