# Theoretical Computer Science 2
# Exercise Sheet 5

René Maseli
Prof. Dr. Roland Meyer
TU Braunschweig
Summer semester 2023

Release: 06/20/2023 Due: 06/28/2023, 18:30

Hand in your answers to the Vips directory of the Stud.IP course until wednesday, 28.06.2023 06:30 pm. You should provide your answers either directly as PDF file or as a readable scan or photo of your handwritten notes. Submit your results as a group of four. On the front page, state the **degree programme, name, surname and student id** of each member of your group.

**Homework Exercise 1: NL-completeness [12 points]**

Enrich your collection of NL-complete problems.

| **Non-Emptiness of regular languages (NONEMPTY-REG)** | |
|---|---|
| **Given:** | A Turing machine $M$. |
| **Question:** | Are $M$ regular and $\mathcal{L}(M) \neq \emptyset$? |

a) [3 points] Show NONEMPTY-REG $\in$ NL by describing the workings of a suitable non-deterministic decider with logarithmic-bounded space complexity.
**Hint:** You may assume, that '$M$ is regular' is deterministicly logspace-computable.

b) [3 points] Show that NONEMPTY-REG is NL-hard with respect to logspace many-one reductions by giving a reduction for PATH $\leq_{\text{m}}^{\text{log}}$ NONEMPTY-REG.

| **Infinitiy of regular languages (INFINITE-REG)** | |
|---|---|
| **Given:** | A Turing Machine $M$. |
| **Question:** | Are $M$ regular and $\mathcal{L}(M)$ infinite? |

c) [6 points] Show that INFINITE-REG is NL-complete wrt. logspace many-one reductions.

**Homework Exercise 2: Complexity classes [6 points]**

Prove the following lemmas:

a) [2 points] Let $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be two functions and $m \geq m' \in \mathbb{N}$ be numbers of tapes. If $\forall x \in \mathbb{N} : g(x) \leq f(x)$ and $\text{NTIME}_m(f) \subseteq \text{DTIME}_{m'}(g)$ hold, then we get $\text{NTIME}_m(f) = \text{coNTIME}_m(f)$.

b) [4 points] Let $\mathcal{C}$ be a complexity class, $R$ be a set of functions and $A \in \mathcal{C}$ a problem. If $A$ is $\mathcal{C}$-hard/complete w.r.t $R$-many-one-reductions, then $\overline{A}$ is co$\mathcal{C}$-hard/complete w.r.t $R$-many-one-reductions.

**Exercise 3:**

Sei $\Sigma$ ein endliches Alphabet. Beweisen Sie:

a) Sei $B$ nichttrivial. Ein Problem $A \subseteq \Sigma^*$ ist in L genau dann, wenn $A \leq_m^{\log} B$.

b) Jede nichttriviale Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ in L ist bereits L-vollständig (bezüglich logspace-many-one-Reduktionen).

**Exercise 4:**

In der Vorlesung wurde die NL-Vollständigkeit von PATH gezeigt. Wir interessieren uns im folgenden nun für weitere NL-vollständige Probleme.

| **Pfadexistenz mit Zwischenknoten (INTERPATH)** | |
|---|---|
| **Given:** | Gerichteter azyklischer Graph $G = \langle V, \rightarrow \rangle$, Knoten $s, t, u \in V$ |
| **Question:** | Gibt es einen Pfad von $s$ über $t$ nach $u$ in $G$? |

a) Zeigen Sie, dass INTERPATH NL-vollständig ist, indem Sie zuerst INTERPATH $\leq_m^{\log}$ PATH, und anschließend PATH $\leq_m^{\log}$ INTERPATH zeigen.

| **Pfadexistenz in azyklischen Graphen (ACYCPATH)** | |
|---|---|
| **Given:** | Gerichteter azyklischer Graph $G = \langle V, \rightarrow \rangle$, Knoten $s, t \in V$ |
| **Question:** | Gibt es einen Pfad von $s$ nach $t$ in $G$? |

b) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass sich das Problem PATH auf ACYCPATH reduzieren lässt. Geben Sie die Funktion explizit an und beweisen Sie, dass sie eine logspace-many-one-Reduktion ist.

| **Azyklizität (ACYCLIC)** | |
|---|---|
| **Given:** | Gerichteter Graph $G = \langle V, \rightarrow \rangle$ |
| **Question:** | Ist $G$ azyklisch? |

c) [4 Punkte] Beim Problem ACYCPATH nehmen wir an, dass die Eingabe ein azyklischer Graph ist. Wir wollen nun für einen gegebenen Graphen feststellen, ob er diese Eigenschaft hat. Beweisen Sie, dass ACYCLIC selbst bereits NL-vollständig ist.

**Exercise 5:**

Im folgenden betrachten wir die Klassen der NL und NL-vollständigen Probleme.

a) Zeigen Sie, dass die Klasse NL unter Vereinigung, Durchschnitt, Komplement und Kleene-Stern abgeschlossen ist.

b) Nun untersuchen Sie die Klasse der NL-harten Probleme auf Abgeschlossenheit unter diesen Operationen.