

Theoretische Informatik 2 Übungsblatt 6

René Maseli
Prof. Dr. Roland Meyer

TU Braunschweig
Sommersemester 2023

Ausgabe: 04.07.2023

Abgabe: 12.07.2023, 18:30

Geben Sie Ihre Lösungen bis Mittwoch, den 12.07.2023 um 18:30 Uhr, ab. Laden Sie sie dazu als PDF oder Scan im Vips im Stud.IP hoch. Geben Sie als 4er-Gruppe ab. Achten Sie darauf, dass **Studiengang, Name Vorname und Matrikelnummer** jedes Gruppenmitglieds lesbar vorne auf Ihrer Abgabe zu finden sind.

Hausaufgabe 1: Abschlusseigenschaften von P [5 Punkte]

Untersuchen Sie die Robustheit der neuen Komplexitätsklassen.

- a) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass P unter Vereinigung, Konkatenation, und Komplement abgeschlossen ist: Falls $L_1, L_2 \in P$, dann auch $L_1 \cup L_2 \in P, L_1 \cdot L_2 \in P, \overline{L_1} \in P$.
- b) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass P unter dem Kleene-Stern abgeschlossen ist: Falls $L_1 \in P$, dann auch $L_1^* \in P$.

Hausaufgabe 2: NP-Vollständigkeit [14 Punkte]

Klassifizieren Sie die folgenden Probleme als NP-vollständig.

Vertex Covering (VC)

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = \langle V, E \rangle$ und $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Gibt es eine Menge $S \subseteq V$ mit $|S| = k$ und $\forall vEw : v \in S \vee w \in S$?

- a) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass $VC \in NP$ gilt, indem Sie einen passenden nichtdeterministischen Entscheider für PIP entwerfen, dessen Laufzeit nach oben durch ein Polynom beschränkt ist.
- b) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass $SAT \leq_m^{\log} VC$ gilt, indem Sie eine passende Reduktion angeben.
Hinweis: Mit k und passend gewählten Kanten können Sie erzwingen, dass jedes Vertex-Covering jeweils genau eines aus k Knotenpaaren enthalten muss.

VALIDITY

Gegeben: Aussagenlogische Formel φ in CNF.

Frage: Ist φ allgemeingültig, also eine Tautologie?

- c) [7 Punkte] Beweisen Sie, dass VALIDITY coNP-vollständig bzgl. \leq_m^{\log} ist.
Hinweis: Mit Hilfe der Tseitin-Transformation lässt sich in Logspace zu einer beliebigen aussagenlogischen Formel eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in CNF berechnen.

Übungsaufgabe 3:

Zeigen Sie: Wenn wir SAT in P lösen könnten, dann könnten wir auch für jede Formel F in CNF eine erfüllende Belegung in P berechnen. Geben Sie dazu einen Algorithmus in Pseudo-Code an.

Übungsaufgabe 4:

Beweisen Sie, dass ENTAILMENT coNP-vollständig bezüglich Logspace-Reduktionen ist.

ENTAILMENT

Gegeben: Aussagenlogische Formeln F, F' in CNF

Frage: Impliziert die Formel F die Formel F' ?

Übungsaufgabe 5:

Eine $n^2 \times n^2$ Sudoku-Matrix M ist in n^2 viele $(n \times n)$ -Blöcke unterteilt. M ist korrekt ausgefüllt, wenn in jedem Block, in jeder Zeile und in jeder Spalte alle Zahlen von 1 bis n^2 genau einmal vorkommen. Es ist leicht zu sehen, dass SUDOKU in NP liegt, denn wir können die fehlenden Einträge raten und effizient überprüfen. Das heißt auch, dass es eine polytime-Reduktion von SUDOKU auf SAT geben muss.

Finden Sie nun solch eine Reduktion von SUDOKU auf SAT.

Bemerkung: Man kann sogar zeigen, dass SUDOKU NP-vollständig ist.

SUDOKU

Gegeben: Eine $n^2 \times n^2$ Sudoku-Matrix M mit Einträgen in $\{1, \dots, n^2, ?\}$

Frage: Gibt es eine Möglichkeit die ?-Einträge so zu ersetzen, dass ein korrekt ausgefülltes Sudoku herauskommt?

Übungsaufgabe 6:

Zeigen Sie, dass CLIQUE NP-vollständig bezüglich logspace-many-one-Reduktionen ist.

CLIQUE

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = \langle V, E \rangle$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$

Frage: Gibt es $S \subseteq V$ mit $|S| = k$ und $\forall u, v \in S: \langle u, v \rangle \in E$?