

# Theoretical Computer Science 2

René Maseli  
Prof. Dr. Roland Meyer

## Exercise Sheet 6

TU Braunschweig  
Summer semester 2023

Release: 07/04/2023

Due: 07/12/2023, 18:30

Hand in your answers to the Vips directory of the Stud.IP course until wednesday, 12.07.2023 06:30 pm. You should provide your answers either directly as PDF file or as a readable scan or photo of your handwritten notes. Submit your results as a group of four. On the front page, state the **degree programme, name, surname and student id** of each member of your group.

### Homework Exercise 1: Closure properties of P [5 points]

Examine the robustness properties of the new complexity classes.

- a) [3 points] Show that P is closed under union, complement and Kleene star: Let  $L_1, L_2 \in P$ , then  $L_1 \cup L_2 \in P, L_1 \cdot L_2 \in P, \overline{L_1} \in P$  and  $L_1^* \in P$ .
- b) [2 points] Show that P is closed under Kleene star: Let  $L_1 \in P$ , then  $L_1^* \in P$ .

### Homework Exercise 2: NP completeness [14 points]

Classify the following problems as NP-complete.

#### Vertex Covering (VC)

**Given:** An undirected graph  $G = \langle V, E \rangle$  and  $k \in \mathbb{N}$ .

**Question:** Is there a set  $S \subseteq V$  with  $|S| = k$  and  $\forall v \in E : v \in S \vee w \in S$ ?

- a) [3 points] Show that  $VC \in NP$  holds, by giving a suitable nondeterministic decider for PIP, whose time complexity is bounded by some polynome.
- b) [4 points] Show that  $SAT \stackrel{\log}{\leq}_m VC$  holds by constructing a suitable reduction.  
**Note:** With  $k$  and a certain constellation of edges you can enforce, that each vertex covering contains exactly one from each of  $k$  vertex pairs.

#### VALIDITY

**Given:** Boolean formula  $\varphi$  in CNF.

**Question:** Is  $\varphi$  tautological, so that it hold for all assignments?

- c) [7 points] Prove that VALIDITY is coNP-complete wrt. logspace-reductions.

**Note:** The Tseitin transform allows to build an equi-satisfiable formula in CNF from any boolean formula by using only logarithmic space.

**Exercise 3:**

Zeigen Sie: Wenn wir SAT in P lösen könnten, dann könnten wir auch für jede Formel  $F$  in CNF eine erfüllende Belegung in P berechnen. Geben Sie dazu einen Algorithmus in Pseudo-Code an.

**Exercise 4:**

Beweisen Sie, dass ENTAILMENT coNP-vollständig bezüglich Logspace-Reduktionen ist.

**ENTAILMENT**

**Given:** Aussagenlogische Formeln  $F, F'$  in CNF

**Question:** Impliziert die Formel  $F$  die Formel  $F'$ ?

**Exercise 5:**

Eine  $n^2 \times n^2$  Sudoku-Matrix  $M$  ist in  $n^2$  viele  $(n \times n)$ -Blöcke unterteilt.  $M$  ist korrekt ausgefüllt, wenn in jedem Block, in jeder Zeile und in jeder Spalte alle Zahlen von 1 bis  $n^2$  genau einmal vorkommen. Es ist leicht zu sehen, dass SUDOKU in NP liegt, denn wir können die fehlenden Einträge raten und effizient überprüfen. Das heißt auch, dass es eine polytime-Reduktion von SUDOKU auf SAT geben muss.

Finden Sie nun solch eine Reduktion von SUDOKU auf SAT.

**Bemerkung:** Man kann sogar zeigen, dass SUDOKU NP-vollständig ist.

**SUDOKU**

**Given:** Eine  $n^2 \times n^2$  Sudoku-Matrix  $M$  mit Einträgen in  $\{1, \dots, n^2, ?\}$

**Question:** Gibt es eine Möglichkeit die ?-Einträge so zu ersetzen, dass ein korrekt ausgefülltes Sudoku herauskommt?

**Exercise 6:**

Zeigen Sie, dass CLIQUE NP-vollständig bezüglich logspace-many-one-Reduktionen ist.

**CLIQUE**

**Given:** Ein ungerichteter Graph  $G = \langle V, E \rangle$  und eine Zahl  $k \in \mathbb{N}$

**Question:** Gibt es  $S \subseteq V$  mit  $|S| = k$  und  $\forall u, v \in S: \langle u, v \rangle \in E$ ?