Prof. Dr. Roland Meyer
René Maseli

Abschlussklausur
Theoretische Informatik 2
25. Juli 2023

TU Braunschweig
Sommersemester2023

1. **Bitte am Anfang ausfüllen:**

   Vorname:

   Nachname:

   Matrikelnummer:

   Studiengang:

   Unterschrift:

2. Die Nummer Ihrer Klausur ist **#1** . Bitte merken Sie sich die Nummer. Wir werden Ihr Klausurergebnis anonymisiert unter Verwendung dieser Nummer bekanntgeben.

3. Achten Sie darauf, dass Ihre Klausur **vollständig ist** und **getackert bleibt** (8 Blätter).

4. Benutzen Sie **nur das an dieses Blatt angeheftete Papier**. Bei Bedarf können wir weitere Leerblätter austeilen. Wenn der Platz auf der Vorderseite des jeweiligen Aufgabenblatts nicht ausreicht, **machen Sie kenntlich**, wo Sie die Bearbeitung der Aufgabe fortsetzen.

5. Als Hilfsmittel sind **ausschließlich** Sprachwörterbücher sowie ein beidseitig **handschriftlich beschriebenes DIN A4-Blatt** erlaubt. Elektronische Geräte müssen während der Klausur ausgeschaltet bleiben. Täuschungsversuche werden als nicht bestanden gewertet und dem Prüfungsamt gemeldet.

6. Schreiben Sie leserlich und bearbeiten Sie Ihre Klausur mit einem **dokumentenechten Stift** (nicht mit Bleistift, kein Tipp-Ex, kein Tintenkiller) und **nicht in roter oder grüner Farbe**.

7. Wir werden die **Klausurergebnisse** auf unserer Website bekanntgeben:
   `tcs.cs.tu-bs.de/teaching/TheoInf2_SS_2023.html`.

8. Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten** (+ ggf. Zeit zum Lüften).

9. Mit **28 Punkten** ist die Klausur **sicher bestanden.**

Bepunktung: (wird von den Korrektoren ausgefüllt)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Max.	10	10	10	10	10	10	10	**70**
Punkte								

1. TM-Konstruktion

$\boxed{9 + 1 = 10 \text{ Punkte}}$

Betrachten Sie die folgende Sprache

$$L = \left\{ a^k b^\ell c^m \in \{a, b, c\}^* \;\middle|\; k, \ell, m > 0, 2k + \ell \text{ ist ein Vielfaches von } m \right\}.$$

a) Konstruieren Sie eine deterministische Turingmaschine M, die L akzeptiert. Beschreiben Sie die Funktionsweise Ihrer Turingmaschine. Sie können so viele Bänder benutzen wie Sie benötigen.

b) Geben Sie eine möglichst genaue Schranke f für die Zeitkomplexität Ihrer Turingmaschine M an, sodass $\mathrm{Time}_M(n) \in \mathcal{O}(f(n))$ gilt.

2. NP-Vollständigkeit

$\boxed{5 + 5 = 10 \text{ Punkte}}$

Betrachten Sie das folgende Problem.

Restricted Hamiltonian Cycle (RHC)	
Gegeben:	Ein gerichteter Graph $\langle V, E\rangle$ und eine nichtleere Kantenmenge $S \subseteq E$.
Entscheide:	Gibt es einen Kreis, welcher jede Kante aus S enthält und jeden Knoten genau einmal besucht?

Zeigen Sie, dass RHC NP-vollständig (bzgl. logspace-many-one-Reduktionen) ist:

a) „Membership“: RHC $\in$ NP.

b) „Hardness“: RHC ist NP-schwer (bzgl. logspace-many-one-Reduktionen).

3. Entscheidbarkeit

5 + 5 = 10 Punkte

Betrachten Sie das folgende Problem.

Threetimes Bounded Accept (TBA)

Gegeben: Eine determinische Turing-Maschine M.

Entscheide: Gibt es mindestens ein Eingabewort x,
das in höchstens $3|x|$ Schritten akzeptiert wird?

a) Zeigen Sie, dass TBA semi-entscheidbar ist, indem Sie einen Algorithmus angeben.

b) Zeigen Sie, dass TBA unentscheidbar ist. Verwenden Sie **nicht** den Satz von Rice.

4. Berechenbarkeit

10 Punkte

Das Postsche Korrespondenz-Problem fragt für eine Menge von Wortpaaren $K := \{\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_k, y_k\rangle\}$ nach nichtleeren Index-Sequenzen $i_1 \ldots i_n$, deren linken und rechten Worte jeweils konkateniert gleich sind: $x_{i_1} \ldots x_{i_n} = y_{i_1} \ldots y_{i_n}$. Die Index-Sequenz wird in so einem Fall als Lösung bezeichnet. Betrachten Sie die folgende totale Funktion

$$\text{shortPCP} : \left(\Sigma^+ \times \Sigma^+\right)^+ \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$\text{shortPCP}(K, m) = \begin{cases} \min\{n \mid n \leq m \text{ und } i_1 \ldots i_n \text{ ist eine Lösung für } K\} & \text{falls es eine Lösung gibt} \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass shortPCP berechenbar ist, indem Sie einen passenden Algorithmus angeben, welcher für jede Eingabe $\langle K, m\rangle$ hält und shortPCP(K, m) ausgibt.

5. NL-Vollständigkeit

5 + 5 = 10 Punkte

Betrachten Sie das folgende Problem.

Strong Connectivity (SCON)

Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = \langle V, \to \rangle$.

Entscheide: Gibt es von jedem Knoten einen Pfad zu jedem anderen Knoten?

Zeigen Sie, dass SCON NL-vollständig (bzgl. logspace-many-one-Reduktionen) ist:

a) „Membership“: SCON $\in$ NL.

b) „Hardness“: SCON ist NL-schwer (bzgl. logspace-many-one-Reduktionen).

6. Quiz

$\boxed{2 + 2 + 3 + 3 = 10 \text{ Punkte}}$

Beantworten Sie die folgenden Fragen. Begründen Sie Ihre Antwort mit einem kurzen Beweis oder einem Gegenbeispiel.

a) Gibt es für jede Turing-Maschine unendlich viele andere Turing-Maschinen, die dieselbe Sprache akzeptieren?

b) Seien L_1 und L_2 disjunkte Sprachen mit $L_1 \cap L_2 = \varnothing$ und $L_1 \cup L_2$ entscheidbar. Falls L_1 unentscheidbar ist, ist L_2 dann auch unentscheidbar?

c) Sei $L = \{\langle M\rangle \mid \forall x \notin \mathcal{L}(M) : \exists y \in \{0,1\} : x.y \in \mathcal{L}(M)\}$. Ermöglicht der Satz von Rice die Aussage, dass die Eigenschaft L unentscheidbar ist?

d) Sei $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ eine partielle berechenbare Funktion. Sei darüber hinaus die Menge $\{w \in \Sigma^* \mid f(w) \text{ ist definiert}\}$ co-semi-entscheidbar. Ist ihre wiefolgt definierte totale Erweiterung $f' : \Sigma^* \to \Gamma^*$ berechenbar?

$$f'(w) = \begin{cases} f(w) & \text{falls definiert} \\ \varepsilon & \text{sonst} \end{cases}$$

7. Kaleidoskop-Maschinen

$\boxed{5 + 5 = 10 \text{ Punkte}}$

Unter einer Kaleidoskop-Maschine (KM) verstehen wir eine Turing-Maschine mit folgender Besonderheit: Für jedes Eingabewort x startet die KM auf einem Band mit unendlichen Folgen aus $x_\sqcup x^{reverse}{}_\sqcup$. Dabei ist $x^{reverse}$ das Wort, das die Buchstaben von x in umgekehrter Reihenfolge enthält. Der Lese-Schreib-Kopf befindet sich zu Beginn wie gewöhnlich über dem ersten Buchstaben von x.

Die initiale Konfiguration einer KM zu dem Eingabewort *abc* sieht wiefolgt aus:

$$\ldots a_\sqcup abc_\sqcup cba_\sqcup\ q_0\ abc_\sqcup cba_\sqcup abc_\sqcup c\ldots$$

Zeigen Sie, dass die durch Kaleidoskop-Maschinen akzeptierten Sprachen **genau** die semi-entscheidbaren Sprachen sind:

a) Zeigen Sie, dass die Sprache jeder KM semi-entscheidbar ist.

b) Zeigen Sie, dass jede semi-entscheidbare Sprache durch eine KM akzeptiert wird.